2025 春季本科计量经济学

第 2 次作业参考答案

1. 考虑一般的线性回归模型

$$\boldsymbol{Y}_{N\times 1} = \boldsymbol{X}_{N\times K}\boldsymbol{\beta}_{K\times 1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{N\times 1},$$

其中 K 个解释变量 $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{Z}_{N\times J}, \boldsymbol{W}_{N\times M}]$ 可以分为两组 $\boldsymbol{Z}$ 与 $\boldsymbol{W}$，满足 $J + M = K$；同时 $\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\delta}^\intercal, \boldsymbol{\theta}^\intercal]^\intercal$ 也可以分为对应的两组。故回归模型可以等价的表示为：

$$Y_i = \boldsymbol{Z}_i^\intercal\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{W}_i^\intercal\boldsymbol{\theta} + \varepsilon_i \Longleftrightarrow \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为误差向量。

(a) 定义矩阵 $\boldsymbol{P_X} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\intercal$。请验证 $\boldsymbol{P_X}$ 满足如下两条性质：

i. 对于任意一个 $\boldsymbol{X}$ 的列向量线性组合构成的向量 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{a}$，$\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^K$，$\boldsymbol{P_X}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}$。
证明：直接计算可知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P_X}\boldsymbol{\xi} &= \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{X}\boldsymbol{a}\\ &= \boldsymbol{X}\boldsymbol{I}\boldsymbol{a}\\ &= \boldsymbol{X}\boldsymbol{a}\\ &= \boldsymbol{\xi}\end{aligned}$$

ii. 对 $\mathbb{R}^N$ 中任意向量 $\boldsymbol{\zeta}$，$\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{P_X}\boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P_X})\boldsymbol{\zeta}$ 与 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{a}$ 相互垂直，$\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^K$，即前者转置与后者乘积为 0。
证明：直接计算可知

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{a})^\intercal(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P_X})\boldsymbol{\zeta} &= \boldsymbol{a}^\intercal\boldsymbol{X}^\intercal(\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{\zeta})\\ &= \boldsymbol{a}^\intercal\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{a}^\intercal\boldsymbol{I}\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{\zeta}\\ &= \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

这样的矩阵 $\boldsymbol{P_X}$ 称为关于 $\boldsymbol{X}$ （列线性空间）的投影矩阵。

(b) 令 $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left[\hat{\boldsymbol{\delta}}^\intercal, \hat{\boldsymbol{\theta}}^\intercal\right]^\intercal$ 为回归模型 (1) 系数的 OLS 估计，$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$。与 (a) 类似地定义 $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{W}}$。令

$$\tilde{\boldsymbol{Y}} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{W}})\boldsymbol{Y}, \qquad \tilde{\boldsymbol{Z}} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{W}})\boldsymbol{Z}.$$

请证明下述结论：

i. $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ 与 $\tilde{\boldsymbol{Z}}$ 分别为 $\boldsymbol{Y}$ 与 $\boldsymbol{Z}$ 对 $\boldsymbol{W}$ 回归的残差向量；
证明：由 OLS 估计系数表达式可知，$\boldsymbol{Y}$ 对 $\boldsymbol{W}$ 回归的系数为 $(\boldsymbol{W}^\intercal\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{W}^\intercal\boldsymbol{Y}$，而 $\boldsymbol{Z}$ 对 $\boldsymbol{W}$ 回归的系数为 $(\boldsymbol{W}^\intercal\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{W}^\intercal\boldsymbol{Z}$，故两组回归对应的残差向量分别为

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{W}(\boldsymbol{W}^\intercal\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{W}^\intercal)\boldsymbol{Y} &= (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{W}})\boldsymbol{Y} = \tilde{\boldsymbol{Y}}\\ (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{W}(\boldsymbol{W}^\intercal\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{W}^\intercal)\boldsymbol{Z} &= (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{W}})\boldsymbol{Z} = \tilde{\boldsymbol{Z}}\end{aligned}$$

ii. $\boldsymbol{e}$ 垂直于 $\boldsymbol{Z}$ 和 $\boldsymbol{W}$，即 $\boldsymbol{Z}^\intercal \boldsymbol{e}$ 与 $\boldsymbol{W}^\intercal \boldsymbol{e}$ 均为 $\mathbf{0}$ 向量；
证明：$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\intercal \boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\intercal \boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_X)\boldsymbol{Y}$，由 (a) 的结论可得 $\boldsymbol{e}$ 与 $\boldsymbol{X}$ 的每个列向量互相垂直，故垂直于 $\boldsymbol{Z}$ 与 $\boldsymbol{W}$ (i.e. $\boldsymbol{Z}^\intercal \boldsymbol{e} = \boldsymbol{W}^\intercal \boldsymbol{e} = 0$)

iii. $\boldsymbol{e}$ 在 $\boldsymbol{W}$ 上的投影为 $\mathbf{0}$，即 $\boldsymbol{P}_W \boldsymbol{e} = \mathbf{0}$；
证明：$\boldsymbol{P}_W \boldsymbol{e} = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{W}^\intercal \boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{W}^\intercal \hat{e} = 0$ (由 ii. 可知 $\boldsymbol{W}^\intercal \hat{e} = 0$)

iv. 考虑 $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ 对 $\tilde{\boldsymbol{Z}}$ 的回归 $\tilde{\boldsymbol{Y}} = \tilde{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{u}$ 为新的误差向量，请说明这个回归的 OLS 估计系数正好等于 (1) 中 OLS 估计的结果 $\hat{\boldsymbol{\delta}}$。提示：在 (1) 的 OLS 估计式 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z}\hat{\boldsymbol{\delta}} + \boldsymbol{W}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{e}$ 两边同乘 $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_W$，进而验证 $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ 满足 $\tilde{\boldsymbol{Y}} = \tilde{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{u}$ 回归系数 OLS 估计的条件。
证明：只需要说明 $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ 正好满足回归 $\tilde{\boldsymbol{Y}} = \tilde{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{u}$ 的 OLS 系数估计所满足的一阶条件 $\tilde{\boldsymbol{Z}}^\intercal \tilde{\boldsymbol{Y}} - \tilde{\boldsymbol{Z}}^\intercal \tilde{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{\delta} = 0$.
首先注意到 $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Z}\hat{\boldsymbol{\delta}} - \boldsymbol{W}\hat{\boldsymbol{\theta}}$，两端同时乘以 $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_W$ 有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_W)\boldsymbol{e} &= (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_W)\boldsymbol{Y} - (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_W)\boldsymbol{Z}\hat{\boldsymbol{\delta}} - (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_W)\boldsymbol{W}\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \boldsymbol{e} &= \tilde{\boldsymbol{Y}} - \tilde{\boldsymbol{Z}}\hat{\boldsymbol{\delta}} \quad (\text{由 i.-iii. 可知})\end{aligned}$$

再在两端同乘 $\tilde{\boldsymbol{Z}}^\intercal$ 可得

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{Z}}^\intercal \tilde{\boldsymbol{Y}} - \tilde{\boldsymbol{Z}}^\intercal \tilde{\boldsymbol{Z}}\hat{\boldsymbol{\delta}} &= \tilde{\boldsymbol{Z}}^\intercal (\tilde{\boldsymbol{Y}} - \tilde{\boldsymbol{Z}}\hat{\boldsymbol{\delta}}) \\ &= \tilde{\boldsymbol{Z}}^\intercal \boldsymbol{e} \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

所以 (1) 中 OLS 估计的结果 $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ 同样满足回归 $\tilde{\boldsymbol{Y}} = \tilde{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{u}$ 的一阶条件，得证

至此，你已经证明了著名的 Frisch-Waugh-Lovell 定理，即回归模型中控制变量 $\boldsymbol{W}_i^\intercal$ 的加入，意味着主解释变量 $\boldsymbol{Z}_i^\intercal$ 对因变量 Y_i 的影响大小（即回归系数估计值），已经控制了 $\boldsymbol{W}_i^\intercal$ 对因变量、主解释变量各自的影响，具有“保持控制变量不变，解释变量对因变量边际影响”的含义。

(c) 作为 FWL 定理的应用，请证明：在包含常数项的回归模型 $Y_i = \alpha + \boldsymbol{X}_i^\intercal \boldsymbol{\beta} + e_i$, $i = 1, \ldots, N$ 中，OLS 估计量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 等于对所有变量去除均值后的回归估计值，即对 $\tilde{Y}_i = \tilde{\boldsymbol{X}}_i^\intercal \boldsymbol{\beta} + u_i$ 的 OLS 估计，其中 $\tilde{Y}_i = Y_i - \bar{Y}$，$\bar{Y}$ 为 Y_i 样本均值，$\tilde{\boldsymbol{X}}$ 定义类似。
证明：题干中回归可改写为该矩阵形式 $\boldsymbol{Y} = \mathbf{1}\alpha + \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e}$，其中 $\mathbf{1}$ 为每个元素均为 1 的 $N \times 1$ 列向量，同上定义回归残差 $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{X}}$，可推得

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{Y}} &= (\mathbf{1} - \boldsymbol{P}_{\mathbf{1}})\boldsymbol{Y} \\ &= \boldsymbol{Y} - \mathbf{1}(\mathbf{1}^\intercal \mathbf{1})^{-1}\mathbf{1}^\intercal \boldsymbol{Y} \\ &= \boldsymbol{Y} - \mathbf{1}N^{-1}(Y_1 + \cdots + Y_N) \\ &= \boldsymbol{Y} - \mathbf{1}\bar{Y} \\ &= \boldsymbol{Y} - \bar{\boldsymbol{Y}} \\ \tilde{\boldsymbol{X}} &= \boldsymbol{X} - \bar{\boldsymbol{X}}\end{aligned}$$

因此由 FWL 定理可知，去均值后的回归 $\tilde{\boldsymbol{Y}} = \tilde{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}$ 得到的 OLS 估计系数 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 与原回归得到的估计值等价

(d) 考虑如下数值示例：样本量 $N = 6$，回归变量个数 $K = 3$，回归方程为 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$，

其中

$$Y^\top = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$X^\top = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

等价的，回归方程可写为 $\boldsymbol{Y} = \alpha\mathbf{1} + \delta\boldsymbol{Z} + \theta\boldsymbol{W} + \boldsymbol{\varepsilon}$，其中 $\mathbf{1}$ 为所有元素等于 1 的向量，即 $\boldsymbol{X}$ 第 1 列，$\boldsymbol{Z}$ 为 $\boldsymbol{X}$ 第 2 列，$\boldsymbol{W}$ 为 $\boldsymbol{X}$ 第 3 列，$\boldsymbol{\beta} = [\alpha, \delta, \theta]^\top$。

i. 请列用 (2)–(3) 中的数值，计算回归系数向量 $\hat{\boldsymbol{\beta}} = [\hat{\alpha}, \hat{\delta}, \hat{\theta}]$ 的取值，以及回归的 R^2。建议：利用 AI 工具，在 Python 或者 R 中进行编程计算。Stata 进行矩阵、向量编程计算的语法更繁琐，不建议使用。当然，上述矩阵计算仅涉及 3×3 矩阵求逆，手算亦可完成。

   解：$\hat{\boldsymbol{\beta}} = [1.667, 0.333, 0.000]^\top$

ii. 基于 (2)–(3) 取值，验证上述 (c) 问的结论，即先用 Y_i, Z_i, W_i 分别对常数项 1 回归，再用所得残差 $\tilde{Y}_i$ 对残差 $\tilde{Z}_i, \tilde{W}_i$ 进行回归，并验证两个系数 $\tilde{\delta}, \tilde{\theta}$ 估计值与 i 中 $\hat{\delta}, \hat{\theta}$ 相等。请问此回归的 R^2 与 i 中 R^2 是否相等？是变高还是变低？

   解：$\tilde{\delta}, \tilde{\theta}$ 与 $\hat{\delta}, \hat{\theta}$ 相等，且两个 R^2 也相等

iii. 定义 $\bar{\boldsymbol{W}} = [\mathbf{1}, \boldsymbol{W}]$，并定义 $\tilde{\boldsymbol{Y}}, \tilde{\boldsymbol{Z}}$ 为 $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$ 各自对 $\bar{\boldsymbol{W}}$ 的回归残差，计算 $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ 对 $\tilde{\boldsymbol{Z}}$ 的回归系数 $\tilde{\delta}$，并验证其等于 i 中估计值 $\hat{\delta}$，进而验证 (b) 中 iv，即 FWL 的一般结论。

   解：$\tilde{\delta} = 0.333$，与 $\hat{\delta}$ 相同

iv. 接续问题 i，计算 $\hat{\alpha}, \hat{\delta}, \hat{\theta}$ 的标准误，t-统计量取值，并对 3 个单系数原假设 $H_0 : \alpha = 0, H_0 : \delta = 0, H_0 : \theta = 0$ 分别计算 p-值，并在 5% 显著性水平下，判断 3 个原假设各自是否成立。建议：Python, R 或 Stata 中，都有标准的回归命令，可以直接输出上述计算结果；类似的，请使用 AI 工具学习如何编写简单代码，完成上述任务。

   解：估计结果如下

	估计值	标准误	t-值	5% 显著性	p-值
$\hat{\alpha}$	1.667	1.866	0.893	不显著	0.438
$\hat{\delta}$	0.333	0.903	0.369	不显著	0.736
$\hat{\theta}$	0.000	0.471	0.000	不显著	1.000

v. 与 iv 类似，检验联合系数假设 $H_0 : \alpha = \delta = \theta = 0$，即计算回归模型的 F 统计量取值，计算相应的 p-值，并说明在 5% 显著性水平下，是否拒绝原假设？换言之，此时 F 统计量拒绝域临界值是多少？注意，首先确定此时 F-统计量所满足的 $F(\ell, m)$ 分布中的两个自由度 ℓ, m 的取值。

   解：$F = 0.094$，p-值为 0.913，自由度为 2、3，5% 的拒绝域临界值为 9.552，故在 5% 显著性水平下无法拒绝原假设