2025 春季本科计量经济学

第 1 次作业

提交日期：3 月 31 日

1. 对 2 元随机变量 X, Y，利用 $\mathrm{cov}(X, Y)$ 的对称双线性特征，证明相关系数 $\rho_{XY} \in [-1, 1]$。提示：对任意 $a \in \mathbb{R}$，考察 $\mathrm{var}(aX + Y) = \mathrm{cov}(aX + Y, aX + Y)$ 的展开式，并利用关于 a 的二次函数判别式，证明相应结论。

2. 对样本 $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^N$，请证明样本相关系数
$$\hat{\rho}_{XY} = \frac{\hat{\sigma}_{XY}}{\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_Y} \in [-1, 1],$$
其中样本协方差 $\hat{\sigma}_{XY} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^N (X_i - \hat{\mu}_X)(Y_i - \hat{\mu}_Y)$，样本方差 $\hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^N (X_i - \hat{\mu}_X)^2$，$\hat{\sigma}_Y^2$ 类似，$\hat{\mu}_X, \hat{\mu}_Y$ 为样本均值。提示，与上题类似，将样本协方差看做向量 $\boldsymbol{X} = [X_1, \ldots, X_N]^\intercal, \boldsymbol{Y} = [Y_1, \ldots, Y_N]^\intercal$ 的对称双线性函数，然后对任意 $a \in \mathbb{R}$，考察 $a\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}$ 的样本方差，并进行展开，得到 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ 的样本协方差、方差等表达式，再行推导。

3. 假设总体分布为 $U([0, a])$，$a > 0$，请计算该分布下的期望与方差表达式。进一步假设有 iid 样本 $\{X_i\}_{i=1}^N \overset{\text{iid}}{\sim} U([0, a])$，请利用样本均值与样本方差表达式，分别构造 a 的一个矩估计，记为 $\hat{a}_{1,N}, \hat{a}_{2,N}$，请说明这两个矩估计是否具有无偏性和一致性。

4. 假设 $\{X_i\}_{i=1}^N$ 为 iid 样本，X_i 期望为 μ，方差为 σ^2。

   (a) 定义基于总体均值的样本方差估计为
   $$\hat{s}_N^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^2,$$
   请证明 $\mathbb{E}\hat{s}_N^2 = \sigma^2$，且 $\hat{s}_N^2 \xrightarrow{\text{a.s.}} \sigma^2$。

   (b) 定义基于样本均值的样本方差估计为
   $$\hat{\sigma}_N^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^N (X_i - \hat{\mu}_N)^2,$$
   其中 $\hat{\mu}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N X_i$，请证明 $\mathbb{E}\hat{\sigma}_N^2 = \sigma^2$，且 $\hat{\sigma}_N^2 \xrightarrow{\text{a.s.}} \sigma^2$。

5. 假设 $\boldsymbol{X} = [X_1, \ldots, X_N] \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$ 为 N 维标准正态分布，即 $X_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$，请证明，对任意的 N 阶正交矩阵 $\boldsymbol{C}$，即 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^\intercal = \boldsymbol{I}_N$，$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}$ 依然服从 N 维标准正态分布。

6. 课件 7 中定义的矩阵 $\boldsymbol{M}$ 称为幂等矩阵 (idempotent matrix)。该类矩阵的一般定义如下：若 N 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$，则称为幂等矩阵。

(a) 假设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，请说明 $\lambda = 0$ 或 1。提示：请用特征值的等价定义，即存在非零向量 $\boldsymbol{c}$，使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{c}$，进行计算证明。

(b) 假设 $\boldsymbol{A}$ 还是一个实数对称矩阵，请利用实对称矩阵特征值分解（第 4 讲课件），即存在正交矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{C}^\intercal$，其中 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ 为对角阵，来证明 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$。