武汉大学本科金融学专业 2018 秋季学期公司金融

第 4 次作业参考答案

1. 考虑有风险的股利折现模型。假设公司每一期的股利 D_t 是随机的，且满足如下 1-阶自回归过程：

$$D_t = \rho D_{t-1} + \epsilon_t$$

其中 ϵ_t 是取值范围 $[0,\infty)$ 的 iid 随机变量，$\mathbb{E}\epsilon_t = \mu > 0$，$\mathrm{var}(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2$。股利折现率为常数 r。

a. 计算股利的条件期望 $\mathbb{E}_t D_{t+n} \equiv \mathbb{E}(D_{t+n}|D_t)$，$n \geq 1$。注：$D_t$ 与 ϵ_{t+n} 是相互独立的，$n \geq 1$。

解：$\mathbb{E}_t D_{t+n} = \rho^n D_t + \sum_{i=1}^n \rho^{i-1}\mu = \rho^n D_t + \mu(1-\rho^n)/(1-\rho)$

b. 定义第 t 期支付完股利 D_t 之后的股票价格为 P_t，使用期望折现股利计算 P_t 如下：

$$P_t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}_t D_{t+n}}{(1+r)^n}.$$

利用上问的结论，计算 P_t 作为 D_t 的函数的表达式。

解：利用 a 的结论

$$P_t = \sum_{n\geq 1} \frac{\rho^n D_t}{(1+r)^n} + \frac{\mu}{1-\rho}\sum_{n\geq 1}\frac{1-\rho^n}{(1+r)^n}$$

$$= \frac{D_t \rho}{1+r-\rho} + \frac{\mu}{1-\rho}\left(\frac{1}{r} - \frac{\rho}{1+r-\rho}\right)$$

c. 假设 t 期股利为 D_t，你以股利后价格 P_t 买入股票，持有到 $t+1$，收到股利D_{t+1} 之后又以价格 P_{t+1} 卖出。定义收益率为

$$R_{t+1} = \frac{D_{t+1} + P_{t+1}}{P_t} - 1.$$

注意在 t 期已知 D_t 的条件下，D_{t+1} 和 P_{t+1} 都是随机的。计算收益率 R_{t+1} 的条件期望 $\mathbb{E}_t R_{t+1} \equiv \mathbb{E}(R_{t+1}|D_t)$ 以及条件方差 $\mathrm{var}_t(R_{t+1})$。注：条件方差的定义为

$$\mathrm{var}_t(R_{t+1}) = \mathbb{E}\left[\left(R_{t+1} - \mathbb{E}(R_{t+1}|D_t)\right)^2 \middle| D_t\right].$$

解：由 b 可知

$$R_{t+1} = \frac{D_{t+1} + P_{t+1}}{P_t} - 1 = \frac{(1+r)D_{t+1} - \rho D_t}{\rho D_t + \mu(1+r)/r}$$

可知

$$\mathbb{E}_t R_{t+1} = \frac{(1+r)\mathbb{E}_t D_{t+1} - \rho D_t}{\rho D_t + \mu(1+r)/r} = \frac{r\rho D_t + \mu(1+r)}{\rho D_t + \mu(1+r)/r} = r$$

进一步可知

$$R_{t+1} - \mathbb{E}_t R_{t+1} = \frac{(1+r)(\epsilon_t - \mu)}{\rho D_t + \mu(1+r)/r}$$

因此

$$\mathrm{var}_t(R_{t+1}) = \frac{(1+r)^2 \sigma_\epsilon^2}{\left(\rho D_t + \frac{\mu(1+r)}{r}\right)^2}$$

d. 最后，计算随机收益率 R_{t+1} 的无条件期望 $\mathbb{E}R_{t+1}$。你能计算出无条件方差 $\mathrm{var}(R_{t+1})$ 的表达式吗？

解：由 $\mathbb{E}_t R_{t+1} = r$ 知 $\mathbb{E}R_{t+1} = r$，无条件方差没有显式解。

2. 给定风险资产均值方差组合的有效前沿 $\sigma_e = \sqrt{a\mu_e^2 + b\mu_e + c}$，其中 $a > 0 > b$；无风险利率为 $r_f > 0$。假设投资者选择的风险资产组合（市场组合）为 $\boldsymbol{w}_m$，组合收益率为 $R_m = \boldsymbol{w}_m^\top \boldsymbol{R}$，均值为 $\mu_m = \mathbb{E}R_m$，方差为 $\sigma_m^2 = \mathrm{var}(R_m)$。注意，市场组合是切点组合，即其与无风险点连线与有效前沿相切。

a. 首先说明，当 $r_f < -\frac{b}{2a}$ 时，市场组合均值满足 $\mu_m > r_f$，Sharpe 比率为正。提示：画出有效前沿及其渐近线，再结合切点组合的性质进行说明。

解：画图说明即可

b. 假设投资者的效用函数为 $U(\mu, \sigma) = \mu - \frac{1}{2}\lambda\sigma^2$，其中 μ, σ 为其所持有的无风险、风险资产组合 $R = (1-w)r_f + wR_m$ 的期望与标准差。通过效用最大化，求解投资者的最优无风险、风险资产配置决策 w^*。

解：根据题意

$$\mu = \mathbb{E}R = \mathbb{E}\left[(1-w)r_f + wR_m\right] = (1-w)r_f + w\,\mathbb{E}R_m$$

即

$$\mu = (1-w)r_f + w\mu_m$$

又有

$$\sigma^2 = \mathrm{var}(R) = w^2 \mathrm{var}(R_m) = w^2 \sigma_m^2$$

因此效用函数可表示为

$$U(\mu, \sigma) = \mu - \frac{1}{2}\lambda\sigma^2 = (1-w)r_f + w\mu_m - \frac{1}{2}\lambda w^2 \sigma_m^2$$

即

$$U(\mu, \sigma) = -\frac{1}{2}\lambda\sigma_m^2 w^2 + \left(\mu_m - r_f\right) w + r_f = f(w)$$

可知$f(w)$为开口向下的抛物线。

根据抛物线的性质，当$w = -\frac{\mu_m - r_f}{2\times\left(-\frac{1}{2}\lambda\sigma_m^2\right)} = \frac{\mu_m - r_f}{\lambda\sigma_m^2}$时，

效用$U(\mu,\sigma) = f(w)$最大。

因此，最优无风险、风险资产配置决策

$$w^* = \frac{\mu_m - r_f}{\lambda\sigma_m^2}$$

c. 投资者的最优风险资产配置如何随着 λ 的改变而改变？

解：根据

$$w^* = \frac{\mu_m - r_f}{\lambda\sigma_m^2}$$

λ越大，w^*越小，即：投资者对风险的负效用越敏感，越厌恶风险，其投资于风险资产的比例越小；反之同理。