

第 3 次作业参考答案

考虑 n 个风险资产, 随机收益率记为列向量 $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n)^\top$, 期望收益率为列向量 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^\top$, 协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, σ_{ii} 表示第 i 个资产收益率的方差。注意 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是对称矩阵, 且我们总假设 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是正定矩阵, 故也是可逆矩阵。

a. 记资产组合权重向量为 $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)^\top$, 满足

$$\mathbf{w}^\top \mathbf{1}_n = w_1 + \dots + w_n = 1$$

其中 $\mathbf{1}_n = (1, \dots, 1)^\top$ 表示全为 1 的列向量。资产组合 $R_w = \mathbf{w}^\top \mathbf{R}$ 。请说明资产组合的期望收益为 $\mu_w = \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu}$, 方差 $\sigma_w^2 = \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}$ 。

解: 直接计算可知。

b. 现在考虑给定资产组合期望收益 $\mu_w = \mu_e$ 时, 资产组合的方差最小化问题。为推导简便起见, 我们把目标函数选为 $\frac{1}{2} \sigma_w^2$ (最小化该目标函数与最小化 σ_w^2 等价), 权重向量 \mathbf{w} 需要满足两个约束条件: $\mathbf{w}^\top \mathbf{1}_n = 1$ 和 $\mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu} = \mu_e$ 。因此我们把最小化问题写为:

$$\min_{\mathbf{w}} \frac{1}{2} \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{w}^\top \mathbf{1}_n = 1 \text{ 且 } \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu} = \mu_e.$$

其中 \mathbf{w} 为选择变量。上述约束最小化问题对应的 Lagrangian 函数 (复习或学习高数有关内容) 可写为

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} - \lambda (\mathbf{w}^\top \mathbf{1}_n - 1) - \delta (\mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu} - \mu_e),$$

其中 λ 为约束 $\mathbf{w}^\top \mathbf{1}_n = 1$ 对应的乘子, δ 为约束 $\mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu} = \mu_e$ 对应的乘子。有了 Lagrangian 函数之后, 求解约束最小化问题就转化为求解 Lagrangian 函数的极值问题。为此, 需要推导 L 关于 \mathbf{w} 的导数。我们使用下列向量记号:

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{w}} = \left(\frac{\partial F}{\partial w_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial w_n} \right)^\top,$$

其中 F 为 n 个变量 $\mathbf{w}^\top = (w_1, \dots, w_n)$ 的函数。

i. 当 $F = \frac{1}{2} \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}$ 时, 请验证 $\partial F / \partial \mathbf{w} = \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}$ 。

注: 你可以选择使用“暴力”解法, 把 $\mathbf{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}$ 写为求和形式 $\sum_i \sum_j w_i \sigma_{ij} w_j$, 然后计算其关于 $w_k, k = 1, \dots, n$ 的偏导数。另外一种更简明的办法是定

义 $\mathbf{v} = \Sigma \mathbf{w}$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^\top$ 为一个列向量, 并且每个元素 v_i 都是 \mathbf{w} 的函数 $v_i(\mathbf{w})$ 。如此一来 $\mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w} = \mathbf{w}^\top \mathbf{v} = w_1 v_1(\mathbf{w}) + \dots + w_n v_n(\mathbf{w})$, 你只需要验证 (i)

$$\frac{\partial \mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w}}{\partial w_k} = w_1 \frac{\partial v_1}{\partial w_k} + \dots + w_n \frac{\partial v_n}{\partial w_k} + v_i$$

以及 (ii) 上式等于 $2v_i$ 即可。

解: 直接计算可知。

ii. 当 $F = \mathbf{w}^\top \mathbf{x}$ 而 \mathbf{x} 为一个常数列向量时, 请验证 $\partial F / \partial \mathbf{w} = \mathbf{x}$ 。

解: 直接计算可知。

iii. 利用上述结论, 验证 Lagrangian 函数的导数等于:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} = \Sigma \mathbf{w} - \lambda \mathbf{1}_n - \delta \boldsymbol{\mu}.$$

解: 直接计算可知。

c. Lagrangian 函数的极值条件为 $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} = \mathbf{0}_n$, 其中 $\mathbf{0}_n$ 表示一个 $n \times 1$ 的零向量。与最小化问题中的两个约束条件联立, 可以得到如下 $n+2$ 个联立方程组:

$$\begin{cases} \Sigma \mathbf{w} - \lambda \mathbf{1}_n - \delta \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}_n & (1) \\ \mathbf{w}^\top \mathbf{1}_n = 1 & (2) \\ \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu} = \mu_e & (3) \end{cases}$$

而其中的未知量为权重向量 \mathbf{w} (共 n 个未知量) 以及两个乘子 λ 和 δ , 共计 $n+2$ 个未知量。求解该方程, 可以得到最优权重向量 \mathbf{w}_e 。步骤如下:

i. 说明 (1) 可重写为

$$\lambda \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n + \delta \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} = \mathbf{w}$$

解: (1) 可写为 $\Sigma \mathbf{w} = \lambda \mathbf{1}_n + \delta \boldsymbol{\mu}$, 两边乘以 Σ^{-1} 得到上式。

ii. 先将上式左乘 $\mathbf{1}_n^\top$, 再将上式左乘 $\boldsymbol{\mu}^\top$, 说明你将得到如下形式的线性方程组:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_e \end{bmatrix}, \quad (4)$$

并给出 A, B, C 的表达式, 并说明 $A, C > 0$ 。注: $A, C > 0$ 需要用到 Σ 是正定矩阵这一事实 (正定矩阵的逆矩阵是不是正定矩阵?)。

解: i. 中方程左乘 $\mathbf{1}_n^\top$ 得到 (常数与矩阵乘积可交换位置)

$$\lambda \mathbf{1}_n^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n + \delta \mathbf{1}_n^\top \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} = \mathbf{1}_n^\top \mathbf{w} = 1$$

故 $A = \mathbf{1}_n^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n$, $B = \mathbf{1}_n^\top \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu}$ 。左乘 $\boldsymbol{\mu}^\top$ 可得

$$\lambda \boldsymbol{\mu}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n + \delta \boldsymbol{\mu}^\top \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{w} = \mu_e$$

上两式整理可得 (4), 其中

$$A = \mathbf{1}_n^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n \quad B = \mathbf{1}_n^\top \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n \quad C = \boldsymbol{\mu}^\top \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu}$$

由于 Σ 是正定矩阵, 所以 Σ^{-1} 也是正定矩阵, 由此知 $A, C > 0$ 。

- iii. 求解二元线性方程组 (4), 说明 λ_e, δ_e 是 μ_e 的线性函数。注: 你可以使用 Cramer 法则求 (4) 中系数矩阵的逆。

解: 对 (4) 的系数矩阵求逆可得

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{AC - B^2} \begin{bmatrix} C & -B \\ -B & A \end{bmatrix}$$

故

$$\lambda_e = \frac{C - B\mu_e}{AC - B^2} \quad \delta_e = \frac{A\mu_e - B}{AC - B^2}$$

- iv. 最优权重可以写为 $\mathbf{w}_e = \lambda_e \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n + \delta_e \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}$ 。据此说明

$$\sigma_e^2 = \mathbf{w}_e^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}_e = A\lambda_e^2 + 2B\lambda_e\delta_e + C\delta_e^2,$$

其中 A, B, C 为 (4) 式对应的表达式。进一步说明, 给定期望收益率 μ_e 所对应的最小方差组合 $\mathbf{w}_e^T \mathbf{R}$ 的方差 σ_e^2 是 μ_e 的二次函数:

$$\sigma_e^2 = a\mu_e^2 + b\mu_e + c, \quad (5)$$

二次曲线 (μ_e, σ_e) 就是 n 个资产组合可行集的边界。

解: 由 $\mathbf{w}_e = \lambda_e \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n + \delta_e \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}$ 可知

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 &= \mathbf{w}_e^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}_e = (\lambda_e \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n + \delta_e \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma} (\lambda_e \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n + \delta_e \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) \\ &= (\lambda_e \mathbf{1}_n^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \delta_e \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \boldsymbol{\Sigma} (\lambda_e \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n + \delta_e \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) \\ &= \mathbf{1}_n^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n \lambda_e^2 + 2 \mathbf{1}_n^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} \lambda_e \delta_e + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} \delta_e^2 \\ &= A\lambda_e^2 + 2B\lambda_e\delta_e + C\delta_e^2 \end{aligned}$$

将 A, B, C 的表达式代入上式可知

$$\sigma_e^2 = \frac{A\mu_e^2 - 2B\mu_e + C}{AC - B^2} = a\mu_e^2 + b\mu_e + c$$

- d. 请求出 (5) 式中 a, b, c 关于 $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}$ 等参数的表达式; 并说明且 $a > 0$ 。

解: 由上问可知

$$a = \frac{A}{AC - B^2}, \quad b = \frac{-2B}{AC - B^2}, \quad c = \frac{C}{AC - B^2}$$

$$\text{且 } A = \mathbf{1}_n^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n \quad B = \mathbf{1}_n^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} \quad C = \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}$$

因此

$$a = \frac{A}{AC - B^2} = \frac{\mathbf{1}_n^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n}{\mathbf{1}_n^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} - (\mathbf{1}_n^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu})^2}$$

$$b = \frac{-2B}{AC - B^2} = \frac{-2 \cdot \mathbf{1}_n^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}_n^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} - (\mathbf{1}_n^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu})^2}$$

$$c = \frac{C}{AC - B^2} = \frac{\boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}_n^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} - (\mathbf{1}_n^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu})^2}$$

为说明 $a > 0$, 只需说明 $\Delta = AC - B^2 > 0$ 。首先注意到

$$\Delta = \mathbf{1}_n^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n \boldsymbol{\mu}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu}_n + \mathbf{1}_n^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} \mathbf{1}_n^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu}$$

对正定矩阵 Σ^{-1} 可以定义 $\Sigma^{-1/2}$ 如下: 考虑 Σ^{-1} 的特征值分解

$$\Sigma^{-1} = \mathbf{H} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{H}^T \quad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 对角线上为 Σ^{-1} 的 n 个特征值, 且 $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$; \mathbf{H} 为正交矩阵, 满足 $\mathbf{H}^T = \mathbf{H}^{-1}$ 。由于 $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$, 故可定义

$$\boldsymbol{\Lambda}^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

并进一步定义 $\Sigma^{-1/2} = \mathbf{H} \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \mathbf{H}^T$ 。计算可知

$$\Sigma^{-1/2} \Sigma^{-1/2} = \mathbf{H} \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \mathbf{H}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \mathbf{H}^T = \mathbf{H} \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \mathbf{H}^T = \mathbf{H} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{H}^T = \Sigma^{-1}.$$

由此, 令 $\mathbf{x} = \Sigma^{-1/2} \mathbf{1}_n$, $\mathbf{y} = \Sigma^{-1/2} \boldsymbol{\mu}$, 则

$$\Delta = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})(\mathbf{y}^T \mathbf{y}) - (\mathbf{x}^T \mathbf{y})^2.$$

如此, 可用 Cauchy-Schwartz 不等式说明 $\Delta > 0$ 。

- e. 请说明有效组合 (μ_e, σ_e) 构成双曲线的一支, 并求出其两条渐近线的表达式。

解: 由 (5) 可知

$$\sigma_e^2 = a\mu_e^2 + b\mu_e + c = a\left(\mu_e + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

上式可改写为

$$\frac{\sigma_e^2}{c - \frac{b^2}{4a}} - \frac{\left(\mu_e + \frac{b}{2a}\right)^2}{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}} = 1$$

由于 $\sigma_e \geq 0$, 因此使上式成立的 (μ_e, σ_e) 构成双曲线的一支。

根据双曲线渐近线公式, 即 $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ 的渐近线为 $y = \pm \frac{\beta}{\alpha} x$

渐近线为

$$\mu_e + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4a}}} \sigma_e$$

整理得

$$\mu_e = \pm \frac{1}{\sqrt{a}} \sigma_e - \frac{b}{2a}$$

- f. 基于 (5) 式, 求出最小方差点 (μ_m, σ_m) 关于 $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}$ 等参数的表达式。

解: 由上问得

$$\sigma_e^2 = a\mu_e^2 + b\mu_e + c = a\left(\mu_e + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

当 σ_e 最小时, $\mu_e = -\frac{b}{2a}$

$$\text{因此 } \mu_m = -\frac{b}{2a}, \quad \sigma_m = \sqrt{c - \frac{b^2}{4a}}$$

代入

$$\begin{aligned} a &= \frac{A}{AC - B^2} & b &= \frac{-2B}{AC - B^2} & c &= \frac{C}{AC - B^2} \\ A &= \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n & B &= \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} & C &= \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} \end{aligned}$$

可得

$$\mu_m = \frac{B}{A} = \frac{\mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n} \quad \sigma_m = \sqrt{\frac{1}{A}} = \sqrt{\frac{1}{\mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n}}$$

即最小方差点为

$$(\mu_m, \sigma_m) = \left(\frac{\mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n}, \sqrt{\frac{1}{\mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n}} \right)$$

- g.** 假设无风险资产利率 $r_f < \mu_m$ 。请计算最优风险资产组合 (μ_*, σ_*) 的表达式。注意最优风险资产组合的确定条件： (μ_*, σ_*) 与 $(r_f, 0)$ 连线与有效前沿相切。

解：在式 $\sigma^2 = a\mu^2 + b\mu + c$ 中, 对 σ 求导得

$$2\sigma = 2a\mu \frac{d\mu}{d\sigma} + b \frac{d\mu}{d\sigma} = (2a\mu + b) \frac{d\mu}{d\sigma}$$

所以有

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = \frac{2\sigma}{2a\mu + b}$$

根据上式, 在切点 (μ_*, σ_*) , 有

$$\frac{\mu_* - r_f}{\sigma_*} = \frac{2\sigma_*}{2a\mu_* + b}$$

上式与 $\sigma_*^2 = a\mu_*^2 + b\mu_* + c$ 联立可得

$$\mu_* = -\frac{2c + br_f}{b + 2ar_f}$$

$$\sigma_* = \sqrt{a\mu_*^2 + b\mu_* + c}$$

即为最优风险资产组合 (μ_*, σ_*) 的表达式

h. 请将 (μ_*, σ_*) 表示为 $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}$ 等参数的表达式。

解：将

$$a = \frac{\mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n}{\mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} - (\mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu})^2}$$

$$b = \frac{-2 \cdot \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} - (\mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu})^2}$$

$$c = \frac{\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} - (\mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu})^2}$$

代入上问表达式即可。