2024 秋季本科时间序列

第 9 次作业答案

12 月 15 日

1. (a) 首先求 $\mathbf{\Phi}$ 的特征值

$$|\mathbf{\Phi}-\lambda \boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} 0.3-\lambda & 0.5 \\ -0.2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.3\lambda + 0.4 = 0$$

解得 $\lambda_1 = 0.8, \lambda_2 = 0.5$。由 $(\mathbf{\Phi}-\lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = (0,0)^\intercal$ 可得 λ_1, λ_2 对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{x}_1 = (1,1)^\intercal, \boldsymbol{x}_2 = (5,2)^\intercal$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}^i = \boldsymbol{A}\mathrm{diag}(0.8, 0.5)^i \boldsymbol{A}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8^i & 0 \\ 0 & 0.5^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}\times 0.8^i + \frac{5}{3}\times 0.5^i & \frac{5}{3}\times 0.8^i - \frac{5}{3}\times 0.5^i \\ -\frac{2}{3}\times 0.8^i + \frac{2}{3}\times 0.5^i & \frac{5}{3}\times 0.8^i - \frac{2}{3}\times 0.5^i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{X}_t$ 的 MA(∞) 展开为

$$\boldsymbol{X}_t = \mathbf{\Phi}(\mathbf{\Phi}\boldsymbol{X}_{t-2} + \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}) + \boldsymbol{\varepsilon}_t = \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{\Phi}^j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}$$

显然 $\boldsymbol{\Psi}_j = \boldsymbol{\Phi}^j$，$\boldsymbol{X}_t = \sum_{j\geq 0}\begin{bmatrix} -\frac{2}{3}\times 0.8^j + \frac{5}{3}\times 0.5^j & \frac{5}{3}\times 0.8^j - \frac{5}{3}\times 0.5^j \\ -\frac{2}{3}\times 0.8^j + \frac{2}{3}\times 0.5^j & \frac{5}{3}\times 0.8^j - \frac{2}{3}\times 0.5^j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-j} \\ \varepsilon_{2,t-j} \end{bmatrix}$

(b) 设 $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{\intercal} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$，解得 $a = 1, b = 1, c = 3$；令 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}}$，则 $\boldsymbol{P}^{\intercal} = \boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}^{\intercal}$，即 $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\intercal}$.

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\intercal} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

由 $\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 有 $\boldsymbol{X}_{t+s} = \sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{\Phi}^j\boldsymbol{P}\boldsymbol{u}_{t+s-j}$，所以 $\frac{\partial \boldsymbol{X}_{t+s}}{\partial u_{kt}} = \boldsymbol{\Phi}^s\boldsymbol{p}_k$，$\boldsymbol{p}_k$ 为 $\boldsymbol{P}$ 的第 k 列, 即

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_{1t+s}}{\partial u_{1t}} &= 0.8^s \\
\frac{\partial X_{2t+s}}{\partial u_{1t}} &= 0.8^s \\
\frac{\partial X_{1t+s}}{\partial u_{2t}} &= \sqrt{3}(\frac{5}{3}\times 0.8^s - \frac{5}{3}\times 0.5^s) \\
\frac{\partial X_{2t+s}}{\partial u_{2t}} &= \sqrt{3}(\frac{5}{3}\times 0.8^s - \frac{2}{3}\times 0.5^s)
\end{aligned}$$

(c) 同 (b) 可解得 $\tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \tilde{\boldsymbol{P}}\tilde{\boldsymbol{P}}^{\intercal}$，即 $\tilde{\boldsymbol{P}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$，同理可得新的脉冲响应函数为 $\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{X}}_{t+s}}{\partial v_{kt}} = \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^s\tilde{\boldsymbol{p}}_k$，其 $\tilde{\boldsymbol{\Phi}} = \begin{bmatrix} 1 & -0.2 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}$.

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^i = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.8^i & 0 \\ 0 & 0.5^i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3}\times 0.8^j - \frac{2}{3}\times 0.5^j & -\frac{2}{3}\times 0.8^i + \frac{2}{3}\times 0.5^i \\ \frac{5}{3}\times 0.8^j - \frac{5}{3}\times 0.5^j & -\frac{2}{3}\times 0.8^i + \frac{5}{3}\times 0.5^i \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{X}_{1t+s}}{\partial v_{1t}} &= 3\times 0.8^s - 0.5^s \\
\frac{\partial \tilde{X}_{2t+s}}{\partial v_{1t}} &= 3\times 0.8^s - \frac{5}{2}\times 0.5^s \\
\frac{\partial \tilde{X}_{1t+s}}{\partial v_{2t}} &= \frac{\sqrt{3}}{2}(-\frac{2}{3}\times 0.8^s + \frac{2}{3}\times 0.5^s) \\
\frac{\partial \tilde{X}_{2t+s}}{\partial v_{2t}} &= \frac{\sqrt{3}}{2}(-\frac{2}{3}\times 0.8^s + \frac{5}{3}\times 0.5^s)
\end{aligned}$$

2.

```r
# 读取和处理数据
raw_data <- readxl::read_xlsx("D:/我的文件/With␣Prof.Liuyan/TS-TA/2024-07-data/2407Release/outdata2407_hz_quarterly.xlsx")

# 数据预处理
processed_data <- raw_data %>%
  dplyr::select(q_dates_data, logrealGDP_nipa, CPI, M2, R7dRepo
    ) %>%
  dplyr::rename(date = q_dates_data) %>%
  dplyr::mutate(
    year = floor(date),
    quarter = round((date - year) * 4) + 1,
    date_ym = make_date(year, (quarter-1)*3 + 1, 1)
  ) %>%
  arrange(date) %>%
  mutate(
    gdp_yoy = (exp(logrealGDP_nipa) / exp(lag(logrealGDP_nipa,
      4)) - 1) * 100,
    cpi_yoy = (CPI / lag(CPI, 4) - 1) * 100,
    m2_yoy = (M2 / lag(M2, 4) - 1) * 100
  ) %>%
  filter(between(date, 1996.75, 2023.75))

# 创建时间序列对象
ts_data <- ts(
  processed_data %>%
```

```r
    dplyr::select(gdp_yoy, cpi_yoy, m2_yoy) %>%
    as.matrix(),
  start = c(1996, 4),
  frequency = 4
)

#--------------------
# （a） 估计三种不同滞后阶数的VAR模型
#--------------------
var1 <- VAR(ts_data, p = 1, type = "const")
var2 <- VAR(ts_data, p = 2, type = "const")
var4 <- VAR(ts_data, p = 4, type = "const")

# 提取第三个方程中关于π(t-1)和y(t-1)的系数
print("VAR(1)␣coefficients␣for␣m2␣equation:")
coef(var1)$m2_yoy[c("cpi_yoy.l1", "gdp_yoy.l1"), ]

print("VAR(2)␣coefficients␣for␣m2␣equation:")
coef(var2)$m2_yoy[c("cpi_yoy.l1", "gdp_yoy.l1"), ]

print("VAR(4)␣coefficients␣for␣m2␣equation:")
coef(var4)$m2_yoy[c("cpi_yoy.l1", "gdp_yoy.l1"), ]

#--------------------
# （b） 选择最优滞后阶数
#--------------------
```

```r
lag_selection <- VARselect(ts_data, type = "const")
print("Lag Selection Criteria:")
print(lag_selection$selection)

# 答案(b):
# 1. AIC和FPE准则建议使用10阶
# 2. HQ准则建议使用6阶
# 3. SC准则建议使用2阶
# 4. 考虑到:
#    - 不同信息准则给出了不同的建议（从2阶到10阶不等）
#    - AIC和FPE准则的一致建议（10阶）
#    - 样本量（1996Q4-2023Q4约108个观测值）足够支持较高阶数的估计
#    - AIC准则在样本量较大时表现较好
# 建议选择p=10作为最终的滞后阶数，这样可以更全面地捕捉变量间的动态关系

#---------------------
# (c) 计算并绘制脉冲响应函数
#---------------------
irf1 <- irf(var1)
irf2 <- irf(var2)
irf4 <- irf(var4)

plot(irf1, main = "Impulse Response Functions (VAR(1))")
plot(irf2, main = "Impulse Response Functions (VAR(2))")
```

```
plot(irf4, main = "Impulse␣Response␣Functions␣(VAR(4))")

#---------------------
# (d) 解释货币政策冲击的影响
#---------------------
# 答案(d):
# 从脉冲响应结果来看，一个外生的货币政策冲击会在未来2.5年（约10个季度）内对经济产生明显影响。具体表现为：货币政策冲击后，短期内GDP增速和CPI增速都会小幅上升，随后逐步回落，最终经济会恢复到长期均衡水平。

# 从GDP增速的角度来看，M2的正向冲击（即扩张性货币政策）会在5-10个季度内推动GDP增速上升，这种刺激经济增长的效果符合我们的经济直觉。不过这种影响不会永远持续，大约2.5年后就会逐渐消失，经济回到正常水平。

# 从CPI增速来看，情况有些不同。虽然M2冲击后CPI增速也会上升，但这个影响相比GDP要小得多，而且持续时间也更短，大概一年多就会减弱。这可能是因为增加的流动性主要被房地产市场和资本市场吸收了，没有大量流入实体消费品领域。

# 总的来说，M2同比增速作为央行的货币政策中介目标，确实能够较好地反映政策的松紧变化。它对经济的影响符合理论预期，特别是在GDP方面的传导效果比较明显，这说明用M2来衡量和执行货币政策是有效的。

```

```r
#---------------------
# (e) 改变变量顺序后的分析
#---------------------
ts_data_alt <- ts(
 processed_data %>%
   dplyr::select(cpi_yoy, gdp_yoy, m2_yoy) %>%
   as.matrix(),
 start = c(1996, 4),
 frequency = 4
)

# 估计三种不同滞后阶数的VAR模型
var_alt1 <- VAR(ts_data_alt, p = 1, type = "const")
var_alt2 <- VAR(ts_data_alt, p = 2, type = "const")
var_alt4 <- VAR(ts_data_alt, p = 4, type = "const")

# 计算并绘制脉冲响应函数
irf1 <- irf(var_alt1)
irf2 <- irf(var_alt2)
irf4 <- irf(var_alt4)

plot(irf1, main = "Impulse␣Response␣Functions␣(VAR(1))")
plot(irf2, main = "Impulse␣Response␣Functions␣(VAR(2))")
plot(irf4, main = "Impulse␣Response␣Functions␣(VAR(4))")

# 答案(e):
```

```
# 当我们将变量顺序改为[π_t, y_t, m_t]后，可以看到货币政策冲击的影响依然存在：短期内GDP增速和CPI增速均出现小幅上升，随后逐步回落，长期来看经济会恢复到正常水平。

# 这个新的变量排序实际上调整了我们对价格刚性的假设：
# 在原来的排序中，我们假设CPI增速的当期变动不仅受到自身结构性冲击的影响，还会受到当期GDP结构性冲击的影响，而GDP增速的当期变动仅取决于其自身的结构性冲击。
# 在新的排序下，我们转而假设CPI增速的当期变动仅由其自身当期的结构性冲击决定，而GDP增速的当期变动则同时受到GDP增速和CPI增速当期结构性冲击的影响。

# 这种变量排序的改变虽然调整了我们对经济结构的假设，但货币政策传导的基本特征仍然得到了验证，表明我们之前的分析结论具有稳健性。

#--------------------
# (f) 预测方差分解
#--------------------
var10 <- VAR(ts_data, p = 10, type = "const")
fevd_results <- fevd(var10)
print("Forecast Error Variance Decomposition:")
print("4 periods ahead:")
print(fevd_results$m2_yoy[4, ])
print("8 periods ahead:")
print(fevd_results$m2_yoy[8, ])
```

```
print("12 periods ahead:")
print(fevd_results$m2_yoy[min(12, nrow(fevd_results$m2_yoy)), ])
print("36 periods ahead:")
print(fevd_results$m2_yoy[min(36, nrow(fevd_results$m2_yoy)), ])

#--------------------
# (g) 使用利率作为货币政策指标的分析
#--------------------
ts_data_r7 <- ts(
 processed_data %>%
   dplyr::select(gdp_yoy, cpi_yoy, R7dRepo) %>%
   as.matrix(),
 start = c(1996, 4),
 frequency = 4
)

# 计算预测方差分解
var_r7 <- VAR(ts_data_r7, p = 9, type = "const")
fevd_r7 <- fevd(var_r7)

print("Forecast Error Variance Decomposition for R7dRepo:")
print("4 periods ahead:")
print(fevd_r7$R7dRepo[4, ])
print("8 periods ahead:")
```

```
print(fevd_r7$R7dRepo[8, ])
print("12 periods ahead:")
print(fevd_r7$R7dRepo[min(12, nrow(fevd_results$m2_yoy)), ])

# 答案(g):
# 通过比较M2同比增速和7天回购利率作为货币政策指标的效果，我们发现M2同比增速可能更适合作为中国货币政策的指标:

# 1. 从方差分解的结果来看:
#    M2同比增速对实际GDP和CPI增速的贡献基本都大于7天回购利率的贡献。这说明M2的变动对实体经济和物价水平的解释力更强。

# 2. 从脉冲响应函数的结果来看:
#    - 总产出和通胀对M2的结构性冲击都表现出显著的响应
#    - 但对7天回购利率的结构性冲击反应并不明显
#    这进一步支持了使用M2同比增速作为货币政策指标的选择

# 综上所述，相比7天回购利率，M2同比增速更能反映中国货币政策的变化及其对经济的影响
```