2023 秋季本科时间序列

第 8 次作业答案

12 月 10 日

1. (a) 为了证明该 VAR(2) 过程平稳，需检查特征方程的根是否都位于单位圆之外。特征方程为：

$$\det\left(\boldsymbol{I}z^2 - \boldsymbol{A}_1 z - \boldsymbol{A}_2\right) = 0,$$

其中：

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & 1 \\ 0 & -0.04 \end{bmatrix}.$$

代入特征方程得到：

$$\boldsymbol{I}z^2 - \boldsymbol{A}_1 z - \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} z^2 - 0.7z + 0.1 & -z - 1 \\ 0 & z^2 - 0.5z + 0.04 \end{bmatrix}.$$

计算行列式：

$$\det\left(\boldsymbol{I}z^2 - \boldsymbol{A}_1 z - \boldsymbol{A}_2\right) = (z^2 - 0.7z + 0.1)(z^2 - 0.5z + 0.04).$$

解方程得到特征根：

$$z^2 - 0.7z + 0.1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 0.5, 0.2,$$

$$z^2 - 0.5z + 0.04 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 0.4, 0.1.$$

所有特征根的模长均小于 1，故该 VAR(2) 过程平稳。

(b) 将该 VAR(2) 过程改写为 VAR(1) 过程 $\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{Y}_{t-1} + \boldsymbol{e}_t$，即写出各项的具体表达式：

定义新的状态向量：

$$\boldsymbol{Y}_t = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_t \\ \boldsymbol{X}_{t-1} \end{bmatrix}.$$

这样，矩阵 $\boldsymbol{\Psi}$ 和误差项 $\boldsymbol{e}_t$ 为：

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{I} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 1 & -0.1 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0 & -0.04 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_t = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(c) 计算 $\boldsymbol{\Psi}$ 的特征值，说明 $\boldsymbol{Y}_t$ 的平稳性条件与 (a) 中 $\boldsymbol{X}_t$ 的条件相同：

为了计算 $\boldsymbol{\Psi}$ 的特征值，我们求解特征方程：

$$\det(\boldsymbol{\Psi} - \lambda \boldsymbol{I}_4) = 0,$$

由于 $\boldsymbol{\Psi}$ 的特征值等同于原 VAR(2) 模型的特征根，因此 $\boldsymbol{\Psi}$ 的特征值为：

$$\lambda_1 = 0.5, \quad \lambda_2 = 0.4, \quad \lambda_3 = 0.2, \quad \lambda_4 = 0.1.$$

所有特征值的模长均小于 1 且与 (a) 中结果相等，故 $\boldsymbol{Y}_t$ 和 $\boldsymbol{X}_t$ 的平稳性条件相同。

(d) 计算特征值对应的特征向量：

$$v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -28 \\ \frac{2}{5} \\ -70 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} \frac{11}{4} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{55}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Psi}^n &= \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^n\boldsymbol{P}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -28 & \frac{1}{5} & \frac{11}{4} \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{10} \\ 1 & -70 & 1 & \frac{55}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\frac{1}{2})^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{2}{5})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{5})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\frac{1}{10})^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{10}{3} & 125 & -\frac{2}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & \frac{10}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{10}{3} & 200 & \frac{5}{3} & -\frac{170}{3} \\ 0 & -\frac{10}{3} & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

由于 $\boldsymbol{\Psi}$ 的特征值模长均小于 1，$\boldsymbol{\Psi}$ 的高次幂 $\boldsymbol{\Psi}^n$ 随着 n 的增大会趋于零。因此，$\boldsymbol{Y}_t$ 和 $\boldsymbol{X}_t$ 的协方差矩阵可以通过长期稳定状态计算。长期稳态协方差矩阵为：

$$\mathrm{cov}(\boldsymbol{Y}_t) = \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Psi})^{-1}\boldsymbol{\Psi}^T.$$

由于 $\boldsymbol{\Psi}$ 是平稳的，因此该协方差矩阵存在且是有限的，$\mathrm{cov}(\boldsymbol{X}_t)$ 是 $\mathrm{cov}(\boldsymbol{Y}_t)$ 的左上部 2×2 矩阵。

2. (a) 定义一个标准基向量 $\boldsymbol{e}_i$ 为第 i 个位置为 1，其他位置为 0 的 $K \times 1$ 向量，即

$$\boldsymbol{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

其中第 i 个元素为 1，其他元素为 0。

考虑 $\boldsymbol{e}_i^\intercal \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{e}_i$。由于 $\boldsymbol{\Omega}$ 是对称矩阵，有：

$$\boldsymbol{e}_i^\intercal \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{e}_i = \omega_{ii}.$$

又因为 $\boldsymbol{\Omega}$ 是正定矩阵，根据正定矩阵的性质，对于任意非零向量 $\boldsymbol{x}$，都有 $\boldsymbol{x}^\intercal \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{x} > 0$。特别地，选择 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i$，得到：

$$\boldsymbol{e}_i^\intercal \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{e}_i = \omega_{ii} > 0.$$

因此，矩阵 $\boldsymbol{\Omega}$ 的对角线元素 $\omega_{ii} > 0$，对于所有 $i = 1, \ldots, K$。

(b) **(i) 对任意 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{T}$，证明 $\boldsymbol{AB} \in \mathcal{T}$：**

矩阵 $\mathcal{T}$ 定义为所有 $K\times K$ 且对角线全为 1 的下三角矩阵的集合。即，矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathcal{T}$ 满足：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\a_{21}&1&0&\cdots&0\\a_{31}&a_{32}&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&0\\a_{K1}&a_{K2}&a_{K3}&\cdots&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\b_{21}&1&0&\cdots&0\\b_{31}&b_{32}&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&0\\b_{K1}&b_{K2}&b_{K3}&\cdots&1\end{bmatrix}.$$

下面证明 $\boldsymbol{AB}$ 也是下三角矩阵，并且对角线元素为 1。

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\a_{21}&1&0&\cdots&0\\a_{31}&a_{32}&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&0\\a_{K1}&a_{K2}&a_{K3}&\cdots&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\b_{21}&1&0&\cdots&0\\b_{31}&b_{32}&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&0\\b_{K1}&b_{K2}&b_{K3}&\cdots&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\c_{21}&1&0&\cdots&0\\c_{31}&c_{32}&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&0\\c_{K1}&c_{K2}&c_{K3}&\cdots&1\end{bmatrix},$$

其中 c_{ij} 是由矩阵乘法计算得到的元素。可以验证得到，矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 依然是下三角矩阵，且对角线元素为 1。因此，$\boldsymbol{AB}\in\mathcal{T}$。

(ii) 证明 $\mathcal{T}$ 中的矩阵可逆：

考虑矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathcal{T}$。已知 $\boldsymbol{A}$ 是下三角矩阵，且对角线元素为 1。对于下三角矩阵，只要对角线元素非零，矩阵就是可逆的。由于 $\boldsymbol{A}$ 的对角线元素全为 1，显然 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的。因此，$\mathcal{T}$ 中的任意矩阵都是可逆的。

(iii) 证明 $\mathcal{T}$ 中矩阵的逆矩阵依然属于 $\mathcal{T}$：

设矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathcal{T}$，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\a_{21}&1&0&\cdots&0\\a_{31}&a_{32}&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&0\\a_{K1}&a_{K2}&a_{K3}&\cdots&1\end{bmatrix}.$$

已知 $\boldsymbol{A}$ 是下三角矩阵，对角线元素为 1，因此它的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是下三角矩阵，且对角线元素为 1（因为对角线元素的倒数仍然是 1）。因此，$\boldsymbol{A}^{-1} \in \mathcal{T}$。

(c) 通过矩阵相似变换来计算 $\boldsymbol{\Omega}_1 = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{A}_1^\intercal$：

矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 的形式：

给定的矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 为下三角矩阵，其形式如下：

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\omega_{21}}{\omega_{11}} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\omega_{31}}{\omega_{11}} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ -\frac{\omega_{K1}}{\omega_{11}} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

其中，ω_{ij} 为矩阵 $\boldsymbol{\Omega}$ 中的元素。

矩阵相似变换 $\boldsymbol{\Omega}_1 = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{A}_1^\intercal$ 的计算：

根据矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 的结构进行相似变换。首先，矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 的第一行是 $[1, 0, 0, \ldots, 0]$，所以与 $\boldsymbol{\Omega}$ 相乘后，第一行将仅包含 ω_{11} 元素，其余元素都被消去。

同样，矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 的第一列是 $[1, -\frac{\omega_{21}}{\omega_{11}}, -\frac{\omega_{31}}{\omega_{11}}, \ldots]$，因此与 $\boldsymbol{\Omega}$ 相乘后，第一列的非对角线元素也会被消去。

得到矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_1$ 的结构为：

$$\boldsymbol{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} \omega_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{\omega}_{22} & \tilde{\omega}_{23} & \cdots & \tilde{\omega}_{2K} \\ 0 & \tilde{\omega}_{23} & \tilde{\omega}_{33} & \cdots & \tilde{\omega}_{3K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \tilde{\omega}_{2K} & \tilde{\omega}_{3K} & \cdots & \tilde{\omega}_{KK} \end{bmatrix}.$$

其中，$\tilde{\omega}_{ij}$ 为新生成的元素，它们通过相似变换计算得到。

证明第一行和第一列除去对角线外为零：

根据 $\boldsymbol{A}_1$ 的结构，第一行和第一列的非对角线元素均为零。具体地：- 第一行的元素：由于第一行 $\boldsymbol{A}_1$ 仅包含 1 和 0，因此与 $\boldsymbol{\Omega}$ 相乘后，第一行的非对角线元素都为

0。- 第一列的元素：由于第一列 $\boldsymbol{A}_1$ 的元素除第一个位置外，都是通过消去 ω_{ij} 值得到的，因此乘积后，第一列的非对角线元素也都为 0。

证明 $\boldsymbol{\Omega}_1$ 为对称正定矩阵：

$\boldsymbol{\Omega}_1$ 是通过对称正定矩阵 $\boldsymbol{\Omega}$ 进行相似变换得到的。由于正定矩阵的相似变换仍然保持正定性，$\boldsymbol{\Omega}_1$ 也仍然是正定矩阵。此外，$\boldsymbol{\Omega}_1$ 依然保持对称性，因为相似变换不会破坏矩阵的对称性。

(d) 关于 $\tilde{\omega}_{22} > 0$ 的证明：

$\boldsymbol{\Omega}_1$ 是通过对称正定矩阵 $\boldsymbol{\Omega}$ 进行相似变换得到的，由于正定矩阵的相似变换保持正定性，因此 $\boldsymbol{\Omega}_1$ 仍然是正定的。由于正定矩阵的对角线元素必须大于零，且在第一步变换后矩阵的第一行和第一列都已经被消去，所以 $\tilde{\omega}_{22}$ 作为剩余的对角线元素之一，必定大于零。

构造矩阵 $\boldsymbol{A}_2$：

为了进一步将矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_2 \equiv \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{\Omega}_1\boldsymbol{A}_2^{\intercal}$ 的前两行、前两列除对角线外均为零，构造矩阵 $\boldsymbol{A}_2$ 类似于之前的构造方法。具体地，矩阵 $\boldsymbol{A}_2$ 的形式为：

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{\tilde{\omega}_{32}}{\tilde{\omega}_{22}} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & -\frac{\tilde{\omega}_{K2}}{\tilde{\omega}_{22}} & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

这个矩阵的作用是将矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_1$ 的第二行和第二列非对角元素消去。

矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_2$ 的结构：

在进行相似变换后，矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_2 = \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{\Omega}_1\boldsymbol{A}_2^\intercal$ 的结构将变为：

$$\boldsymbol{\Omega}_2 = \begin{bmatrix} \omega_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{\omega}_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\tilde{\omega}}_{33} & \cdots & \tilde{\tilde{\omega}}_{3K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \tilde{\tilde{\omega}}_{KK} \end{bmatrix}.$$

其中，矩阵的前两行和前两列（除去对角线）都被消去了，且矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_2$ 保持对称性，并且仍然是正定矩阵。

(e) 1. 重复步骤的过程：

根据前面的步骤，可以通过构造类似的矩阵 $\boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4, \ldots, \boldsymbol{A}_K$ 来逐步消去矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_{K-1}$ 的非对角线元素。每次通过矩阵 $\boldsymbol{A}_i$ 对矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_{i-1}$ 进行相似变换，得到一个新的矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_i$，其前 i 行和前 i 列除去对角线外的元素为零。

2. 终止条件：

最终，经过 $K-1$ 次相似变换，会得到一个对角矩阵 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}_K\boldsymbol{\Omega}_{K-1}\boldsymbol{A}_K^\intercal$。由于相似变换保持矩阵的正定性，因此 $\boldsymbol{D}$ 仍然是正定矩阵。并且，由于每次消去非对角线元素，最终得到的矩阵 $\boldsymbol{D}$ 将是一个对角矩阵，其对角线元素均大于零。

结论：

通过逐步的相似变换，我们最终得到一个对角矩阵 $\boldsymbol{D}$，且 $\boldsymbol{D}$ 是正定矩阵。

(f) Cholesky 分解的构造：

已证得通过一系列相似变换，最终得到了一个对角矩阵 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}_K\boldsymbol{\Omega}_{K-1}\boldsymbol{A}_K^\intercal$，其中 $\boldsymbol{D}$ 是对角矩阵，且其对角线元素 d_{ii} 满足 $d_{ii} > 0$（因为原始矩阵 $\boldsymbol{\Omega}$ 是正定矩阵）。

构造矩阵 $\boldsymbol{B}$：

由于每一步的变换矩阵 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_K$ 都是下三角矩阵且对角线元素为 1，因此我们可以将这些变换矩阵组合成一个下三角矩阵 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2 A_K$，显然，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的每个变换矩阵 $\boldsymbol{A}_i$ 都属于集合 $\mathcal{T}$（即下三角矩阵且对角线元素为 1）。

Cholesky 分解：

最终可以将矩阵 $\mathbf{\Omega}$ 表示为：

$$\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{\intercal},$$

其中, $\boldsymbol{B}$ 是下三角矩阵, 且对角线元素为 1, $\boldsymbol{D}$ 是对角矩阵, 且其对角线元素 $d_{ii} > 0$, 因此这正是矩阵 $\mathbf{\Omega}$ 的 Cholesky 分解。