# 2024 秋季本科时间序列

# 第 10 次作业答案

12 月 17 日

1. (a) 为保证 $h_t$ 非负，应满足 $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0$

   为保证 $u_t^2$ 平稳且 $\mathbb{E}[u_t^2] > 0$，应满足 $\alpha_0 > 0, \alpha_1 + \beta_1 < 1$

   综上，参数取值限制条件为 $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0, \alpha_1 + \beta_1 < 1$

   (b) 因为 $\varepsilon_t$ 是独立同分布的白噪声，满足 $\mathbb{E}[\varepsilon_t|\Omega_{t-1}] = 0, \mathbb{E}[\varepsilon_t^2|\Omega_{t-1}] = 1$

   所以

$$\mathbb{E}[u_t|\Omega_{t-1}] = \mathbb{E}[\sqrt{h_t}\varepsilon_t|\Omega_{t-1}] = \sqrt{h_t}\mathbb{E}[\varepsilon_t|\Omega_{t-1}] = 0$$

$$\mathbb{E}[u_t^2|\Omega_{t-1}] = \mathbb{E}[h_t\varepsilon_t^2|\Omega_{t-1}] = h_t\mathbb{E}[\varepsilon_t^2|\Omega_{t-1}] = h_t$$

   因此，$u_t$ 满足鞅差过程的定义。

   (c) 令 $\boldsymbol{Y} = (X_1, \cdots, X_T)^\intercal, \boldsymbol{X} = (X_0, \cdots, X_{T-1})^\intercal, \boldsymbol{u} = (u_1, \cdots, u_T)^\intercal$，有

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= (\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{Y} \\ &= (\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\intercal(\boldsymbol{X}\rho + \boldsymbol{u}) \\ &= \rho + (\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_{t-1}^2)^{-1}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_{t-1}u_t\end{aligned}$$

   因为 $\mathbb{E}[X_{t-1}u_t] = \mathbb{E}(X_{t-1}\mathbb{E}[u_t|X_{t-1}, \cdots, X_0]) = \mathbb{E}(X_{t-1}\sqrt{h_t}\mathbb{E}[\varepsilon_t|\Omega_{t-1}]) = 0$，所以 $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_{t-1}u_t \xrightarrow{a.s.} 0$，OLS 估计依然具有一致性，$\hat{\rho} \xrightarrow{a.s.} \rho$

(d)

$$\sqrt{T}(\hat{\rho}-\rho)=(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}X_{t-1}^2)^{-1}\sqrt{T}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}X_{t-1}u_t$$

有 $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}X_{t-1}^2u_t^2 \xrightarrow{a.s.} \Sigma \equiv \lim_T \frac{1}{T}\sum_t \mathbb{E}[X_{t-1}^2u_t^2]$，即 $\sqrt{T}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}X_{t-1}u_t \xrightarrow{d} N(0,\Sigma)$，且 $\lim_T \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}X_{t-1}^2=\mathbb{E}(X_t^2)=M$，则 $\sqrt{T}(\hat{\rho}-\rho)\xrightarrow{d} N(0,\frac{\Sigma}{M^2})$

因为 $u_t$ 是平稳过程，且 $|\rho|<1$，易得 $X_t$ 亦为平稳过程，有 $E(X_t^2)=E(X_{t-1}^2)$，且 $E(u_t^2)=\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\beta_1}$，因此

$$X_t^2=(\rho X_{t-1}+u_t)^2$$

$$E(X_t^2)=\rho^2E(X_t)^2+E(u_t^2)+2\rho E(X_{t-1}u_t)$$

$$E(X_t^2)=\frac{\alpha_0}{(1-\rho^2)(1-\alpha_1-\beta_1)}$$

又

$$\begin{aligned}E[X_{t-1}^2u_t^2]&=E[X_{t-1}^2E(u_t^2|\Omega_{t-1})]=E[h_tX_{t-1}^2]\\&=E[(\alpha_0+\alpha_1u_{t-1}^2+\beta_1h_{t-1})X_{t-1}^2]\\&=\frac{\alpha_0^2}{(1-\rho^2)(1-\alpha_1-\beta_1)}+(\alpha_1+\beta_1)E(X_{t-1}^2h_{t-1})\end{aligned}$$

所以

$$\sqrt{T}(\hat{\rho}-\rho)\xrightarrow{d} N(0,\frac{\Sigma}{M^2})=\frac{E[X_{t-1}^2u_t^2]}{[E(X_t^2)]^2}$$

其中 $E(X_t^2)=\frac{\alpha_0}{(1-\rho^2)(1-\alpha_1-\beta_1)}, E[X_{t-1}^2u_t^2]=E[h_tX_{t-1}^2]=\frac{\alpha_0^2}{(1-\rho^2)(1-\alpha_1-\beta_1)}+(\alpha_1+\beta_1)E(X_{t-1}^2h_{t-1})$

(e) 如果仅完成推导的过程，不需要知道 $\alpha_0,\alpha_1,\beta_1$ 的取值，但若要计算该方差表达式的实际数值，则需要知道 $\alpha_0,\alpha_1,\beta_1$ 的参数取值

(f) 要计算异方差稳健渐近标准误，首先估计残差 $\hat{u}_t=X_t-\hat{\rho}X_{t-1}$，再计算异方差稳健的方差估计值

$$\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\rho})=\frac{\sum_{t=1}^{T}X_{t-1}^2\hat{u}_t^2}{(\sum_{t=1}^{T}X_{t-1}^2)^2}$$

所以标准误为

$$\mathrm{SE}(\hat{\rho})=\sqrt{\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\rho})}=\frac{\sqrt{\sum_{t=1}^{T}X_{t-1}^2\hat{u}_t^2}}{\sum_{t=1}^{T}X_{t-1}^2}$$

若已知 $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$ 的取值，可以通过以下方法改进计算：

利用已知参数和 $\hat{u}_t$，可计算 $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{u}_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$，若该过程是平稳的，可以将 $h_0$ 设定为长期均值 $\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\beta_1}$

1. 可以选择重新计算 $E[X_t^2 u_t^2] = E[X_t^2 h_t]$ 的估计值 $\widehat{\mathbb{E}[X_t^2 h_t]} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^T X_t^2 h_t$，此时方差为 $\hat{\text{Var}}(\hat{\rho}) = \frac{\widehat{\mathbb{E}[X_t^2 h_t]}}{\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^T X_t^2\right)^2}$

2. 或重新计算 $E(X_t^2)$ 的估计值 $\frac{\alpha_0}{(1-\hat{\rho}^2)(1-\alpha_1-\beta_1)}$

3. 或使用 WLS 估计，令 $w_t = \frac{1}{h_t}$，重新对 $\sqrt{w_t} X_t = \rho\sqrt{w_t} X_{t-1} + \sqrt{w_t} u_t$ 进行 OLS 估计，得到相应的标准误

2. (a) 有

$$T(\hat{\rho}-1) = \frac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^T \Delta X_t X_{t-1}}{\frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^T X_{t-1}^2} \xrightarrow{d} \frac{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}B(1)^2 - \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}}{\sigma_\varepsilon^2 \int_0^1 B(s)^2 ds} = \frac{B(1)^2 - 1}{2\int_0^1 B(s)^2 ds}$$

所以

$$T^{1-\delta}(\hat{\rho}-1) \xrightarrow{d} T^{-\delta}\frac{B(1)^2 - 1}{2\int_0^1 B(s)^2 ds}$$

当 $T \to \infty, T^{-\delta} \xrightarrow{a.s.} 0$，因此对任意 $\delta > 0, T^{1-\delta}(\hat{\rho}-1) \xrightarrow{a.s.} 0$

(b) $T(\hat{\rho}-1) \xrightarrow{a.s.} T(\rho-1)$，由 $|\rho| < 1$ 有 $\rho - 1 < 0$，故 $T \to \infty$ 时有 $T(\rho-1) \to -\infty$，即 $T(\hat{\rho}-1) \xrightarrow{a.s.} -\infty$

3. (a) 对 $X_t$ 进行 $d$ 次差分

$$\Delta^d X_t = \Delta^d(\alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_d t^d) + \Delta^d Z_t$$

由于 $\Delta^d(\alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_d t^d)$ 是一个常数或多项式的低阶项（具体取决于多项式的形式），且 $\Delta^d Z_t = \varepsilon_t$ 是白噪声，因此

$$\Delta^d X_t = \text{常数或低阶多项式} + \varepsilon_t$$

这个结果是平稳的，因为白噪声 $\epsilon_t$ 是平稳的，按照同样的方法进行 $d-1$ 次差分，仍然会存在趋势，$d-1$ 次差分的结果是不平稳的。因此，$X_t$ 经过 $d$ 次差分后是平稳的，但在 $d-1$ 次差分后是不平稳的，故 $X_t$ 是 $I(d)$ 过程

(b) 当 $d=3$ 时，给定的模型为 $X_t=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\alpha_3 t^3+Z_t$，其中 $Z_t$ 满足差分方程 $\Delta^3 Z_t=\epsilon_t$

要解这个差分方程，我们可以展开 $\Delta^3 Z_t$

$$\Delta^3 Z_t = Z_t - 3Z_{t-1} + 3Z_{t-2} - Z_{t-3} = \epsilon_t$$

这是一个线性差分方程，其特征方程为 $r^3-3r^2+3r-1=0$，解为 $r=1$（重根，重数为 3）。因此，齐次方程的通解为

$$Z_t^h = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$$

其中 $c_0, c_1, c_2$ 是待定常数

为了找到非齐次方程的特解，我们考虑对 $\varepsilon_t$ 进行三次累加。因此，$Z_t$ 的通解可以表示为

$$Z_t = Z_t^h + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} \varepsilon_{t-k}$$

具体地，$\binom{k+2}{2}$ 表示组合数，计算公式为 $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

因此，最终 $Z_t$ 的表达式为

$$Z_t = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \varepsilon_t + 3\varepsilon_{t-1} + 6\varepsilon_{t-2} + 10\varepsilon_{t-3} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} \varepsilon_{t-k}$$

(c) 在回归模型 $Z_t=\alpha+\rho Z_{t-1}+\varepsilon_t$ 下，截距项 $\alpha$ 的 OLS 估计量为:

$$\hat{\alpha}_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(Z_t - \hat{\rho}_T Z_{t-1})$$

在假设 $H_0:\rho=1$ 下，$Z_t=\alpha+Z_{t-1}+\varepsilon_t=Z_0+\alpha t+\sum_{s=1}^{t}\varepsilon_s$，所以有

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}_T &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(Z_t - Z_{t-1}) + \frac{1}{T}(1-\hat{\rho})\sum_{t=1}^{T} Z_{t-1} \\
&= \frac{Z_T - Z_0}{T} + \frac{1}{T}(1-\hat{\rho})\sum_{t=1}^{T} Z_{t-1} \\
&= \alpha + \frac{1}{T}\sum_{s=1}^{T}\varepsilon_s + \frac{1}{T}(1-\hat{\rho})\sum_{t=1}^{T} Z_{t-1}
\end{aligned}$$

注意这是一个带漂移的单位根过程，尽管 $\frac{1}{T}\sum_{s=1}^{T}\varepsilon_s \xrightarrow{a.s.} 0$，但最后一项不会收敛到 0，因此 $\hat{\alpha}_T$ 不具有一致性