

2024 秋季本科时间序列

第 7 次作业

提交日期：11 月 25 日

1. 考虑如下 2 变量 VAR(1) 过程：

$$\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 \\ 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}}_{\Phi} \mathbf{X}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t.$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 为向量白噪声，协方差矩阵为 $\mathbf{I}_{2 \times 2}$ 。

(a) 请计算 $\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}\mathbf{X}_t$ 。

(b) 请计算 $\text{var}(\mathbf{X}_t) = \mathbb{E}(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})^\top$ 。

(c) 请计算 $\text{cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t-k}) = \mathbb{E}(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_{t-k} - \boldsymbol{\mu})^\top$, $\forall k = 1, 2, \dots$ 。

2. 给定 m 阶若当块, $m \geq 2$:

$$J_m = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & 1 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \lambda & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

请尝试计算推导 J_m^n 的通项表达式, $\forall n \geq 1$, 并说明当 $|\lambda| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} J_m^n = \mathbf{0}_{m \times m}$ 。