2024 秋季本科时间序列

# 第 5 次作业

提交日期：11 月 11 日

1. 给定平稳 AR(2) 过程 $X_t = \mu + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$，$\{\varepsilon_t\}$ 为白噪声，方差为 $\sigma_\varepsilon^2$。定义 $Y_t = X_t - \mathbb{E}X_t = X_t - \frac{\mu}{1-\phi_1-\phi_2}$。请利用

$$\begin{bmatrix} Y_{t+1} \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

推导 $\hat{X}_{t+s|t}, \forall s \geq 1$ 的通项表达式。

2. 给定可逆 MA(1) 过程 $X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$，请对任意 $s \geq 1$，计算 $L(X_{t+s}|X_t, X_{t-1}) = a_s X_t + b_s X_{t-1}$ 的系数 $a_s, b_s$，并与课件推导的 $\hat{X}_{t+s|t} = L(X_{t+s}|X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots)$ 中对应项系数做比较。

3. 给定 2 元正态分布 $(X, Y) \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$，写出联合密度函数 $f(x, y)$，计算 $X$ 的边缘密度函数 $f_X(x)$，进而计算 $Y$ 的条件密度函数 $f(y|x)$，并计算给定 $X = x$ 时，$Y$ 的条件期望 $\mathbb{E}(Y|X = x)$。

4. 考虑一般的线性回归模型

$$\boldsymbol{Y}_{T\times 1} = \boldsymbol{X}_{T\times K}\boldsymbol{\beta}_{K\times 1} + \boldsymbol{e}_{T\times 1},$$

其中 $K$ 个解释变量 $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{Z}_{T\times N}, \boldsymbol{W}_{T\times M}]$ 可以分为两组 $\boldsymbol{Z}$ 与 $\boldsymbol{W}$，满足 $N + M = K$；同时 $\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\delta}^\intercal, \boldsymbol{\theta}^\intercal]^\intercal$ 也可以分为对应的两组。故回归模型可以等价的表示为：

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{e}. \tag{1}$$

(a) 定义矩阵 $\boldsymbol{P_X} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\intercal$。请验证 $\boldsymbol{P_X}$ 满足如下两条性质：

i. 对于任意一个 $\boldsymbol{X}$ 的列向量线性组合构成的向量 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{a}$，$\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^K$，$\boldsymbol{P_X}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}$。

ii. 对 $\mathbb{R}^T$ 中任意向量 $\boldsymbol{\zeta}$，$\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{P_X}\boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P_X})\boldsymbol{\zeta}$ 与 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{a}$ 相互垂直，$\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^K$，即前者转置与后者乘积为 0。

这样的矩阵 $\boldsymbol{P_X}$ 称为关于 $\boldsymbol{X}$（列线性空间）的投影矩阵。

(b) 令 $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left[\hat{\boldsymbol{\delta}}^\intercal, \hat{\boldsymbol{\theta}}^\intercal\right]^\intercal$ 为回归模型 (1) 系数的 OLS 估计，$\hat{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$。与 (a) 类似地定义 $\boldsymbol{P_W}$。令

$$\tilde{\boldsymbol{Y}} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P_W})\boldsymbol{Y}, \qquad \tilde{\boldsymbol{Z}} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P_W})\boldsymbol{Z}.$$

请证明下述结论：

i. $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ 与 $\tilde{\boldsymbol{Z}}$ 分别为 $\boldsymbol{Y}$ 与 $\boldsymbol{Z}$ 对 $\boldsymbol{W}$ 回归的残差向量；

ii. $\hat{\boldsymbol{e}}$ 垂直于 $\boldsymbol{Z}$ 和 $\boldsymbol{W}$，即 $\boldsymbol{Z}^\intercal\hat{\boldsymbol{e}}$ 与 $\boldsymbol{W}^\intercal\hat{\boldsymbol{e}}$ 均为 $\boldsymbol{0}$ 向量；

iii. $\hat{\boldsymbol{e}}$ 在 $\boldsymbol{W}$ 上的投影为 $\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{P_W}\hat{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{0}$；

iv. 考虑 $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ 对 $\tilde{\boldsymbol{Z}}$ 的回归 $\tilde{\boldsymbol{Y}} = \tilde{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{u}$ 为残差项，请说明这个回归的 OLS 估计系数正好等于 (1) 中 OLS 估计的结果 $\hat{\boldsymbol{\delta}}$。提示：在 (1) 的 OLS 估计式 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z}\hat{\boldsymbol{\delta}} + \boldsymbol{W}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\boldsymbol{e}}$ 两边同乘 $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P_W}$，进而验证 $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ 满足 $\tilde{\boldsymbol{Y}} = \tilde{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{u}$ 回归系数 OLS 估计的条件。

至此，你已经证明了著名的 Frisch-Waugh-Lovell 定理。

(c) 作为 FWL 定理的应用，请证明：在包含常数项的回归模型 $Y_t = \alpha + \boldsymbol{X}_t^\intercal \boldsymbol{\beta} + e_t$, $t = 1, \ldots, T$ 中，$\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 等价于对所有变量去除均值后的回归估计值，即 $\tilde{Y}_t = \tilde{\boldsymbol{X}}_t^\intercal \boldsymbol{\beta} + u_t$，其中 $\tilde{Y}_t = Y_t - \bar{Y}$，$\bar{Y}$ 为 $Y_t$ 样本均值，$\tilde{\boldsymbol{X}}$ 定义类似。