

金融工程 2024 年秋 · 时间序列

# 第 15 讲：状态空间模型与 Markov 区制转 换模型简介

授课人：刘 岩

武汉大学经管学院金融系

2024 年 12 月 16 日

# 本讲内容

- 1 状态空间模型
- 2 Kalman 滤波
- 3 Markov 区制转换模型

## 本节内容

- 1 状态空间模型
- 2 Kalman 滤波
- 3 Markov 区制转换模型

## 状态空间模型

- 前面课程中介绍的平稳时间序列，其动态特征都通过动态方程直接进行刻画
  - ARMA/VAR/ARCH/GARCH
  - 其核心都可以归结为（低阶）AR 动态方程 + （低阶）MA 动态方程
- 在基础的时间序列动态方程之上，可以考虑复合的时间序列过程：状态变量满足一个动态方程，观测变量又是状态变量的一个函数，以及可能的额外误差项（噪音），即状态-空间表示 (state-space representation)

## 状态空间模型的例子

- 考虑  $Y_t = X_t + w_t$ , 其中  $\{w_t\}$  为白噪声过程; 而  $X_t$  为 AR(1) 过程  
 $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$ ,  $\{\varepsilon_t\}$  为白噪声过程, 且与  $w_t$  无关
- 上述动态系统可以写为两 (组) 方程的状态空间表示:

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$Y_t = X_t + w_t$$

其中第一个方程为状态动态 (state dynamics) 方程, 第二个方程为空间观测 (space observation) 方程

- 进一步变化可以发现  $Y_t$  为 ARMA(1,1) 过程:

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \underbrace{w_t - \phi w_{t-1} + \varepsilon_t}$$

可验证这是一个 MA(1) 过程

## 状态空间模型的常见形式

- 状态空间模型的常见形式：状态变量  $X_t$  为  $r \times 1$  向量，观测变量  $Y_t$  为  $n \times 1$  向量，外生变量  $Z_t$  为  $k \times 1$  向量，满足如下（线性）动态方程系统

$$X_t = FX_{t-1} + v_t$$

$$Y_t = H^T X_t + A^T Z_t + w_t$$

- 其中  $v_t$  为状态方程零均值白噪声冲击（向量），满足  $\mathbb{E}v_t v_t^T = Q$ ， $\mathbb{E}v_t v_{t-j}^T = 0 \forall j \neq 0$ ； $w_t$  为观测方程零均值白噪声冲击（向量），满足  $\mathbb{E}w_t w_t^T = R$ ， $\mathbb{E}w_t w_{t-j}^T = 0 \forall j \neq 0$ ；且两组白噪声无关  $\mathbb{E}v_t w_{t-j}^T = 0 \forall j$
- $F$  为状态动态方程系数矩阵，该方程说明  $X_t$  是一个 VAR 过程； $H, A$  为观测方程系数矩阵，写转置形式是与多元回归方程写法保持一致

## 状态空间模型的等价形式与变量关系

- 将外生变量  $Z_t$  在观测方程中单独写出，通常是为了突出观测变量  $Y_t$  不仅受内生状态变量  $X_t$  影响
  - 特例：观测方程中的常数项， $Z_t = [1, \dots, 1]^T$
- 但实际上可以将  $Z_t$  与  $X_t$  合并，定义  $\tilde{X}_t = [X_t^T, Z_t^T]^T$ ，并将各系数矩阵、白噪声向量用零矩阵（分块）做相应拓展，可以得到如下等价的状态空间表示：

$$\tilde{X}_t = \tilde{F}\tilde{X}_{t-1} + \tilde{v}_t$$

$$Y_t = \tilde{H}^T \tilde{X}_t + w_t$$

- $Z_t$  的外生性体现在  $\mathbb{E}Z_t v_t^T = \mathbb{E}Z_t w_t^T = 0$

## ARMA 过程的状态空间模型估计

- ARMA( $p, q$ ) 过程的估计, 由于 MA( $q$ ) 部分的存在, 常规方法不易处理
  - 可以用 OLS 辅助回归的方法, 但必然带来有限样本偏误
  - 常规似然函数高度非线性, 数值求解稳健性较低
- 状态空间表示提供了一个更便利的极大似然估计路径
  - 需要使用 Kalman 滤波 (filter) 递归算法对似然函数进行计算
  - 该方法对一般的状态空间模型均适用



## ARMA 过程的状态空间表示：直接方法——兜圈子

- 考虑 ARMA( $p, q$ ) 过程

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \theta_0 \varepsilon_t + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

- 定义  $\mathbf{X}_t = [Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}, \varepsilon_t, \dots, \varepsilon_{t-q}]^T$ , 则可对应定义  $\mathbf{F}$  与  $\mathbf{v}_t$ , 使得

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{F}\mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{v}_t$$

- 相应的

$$\mathbf{H} = [\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_0, \dots, \theta_q]$$

则  $Y_t = \mathbf{H}\mathbf{X}_t$

- 上述状态空间表示不简洁： $\mathbf{F}$  中同样包含  $\{\phi_i\}, \{\theta_j\}$ , 实质是同义反复

## ARMA 过程的状态空间表示：紧凑方法

- 令  $r = \max(p, q + 1)$ , 并补充定义  $\phi_i = 0$ , 若  $p < i \leq r$ ; 以及  $\theta_j = 0$ , 若  $q < j \leq r$ ; 此时  $Y_t$  可写为

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \cdots + \phi_r Y_{t-r} + \theta_0 \varepsilon_t + \cdots + \theta_{r-1} \varepsilon_{t-r+1}$$

- 定义  $\mathbf{X}_t = [X_{1t}, \dots, X_{rt}]$  满足如下状态方程

$$\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_{r-1} & \phi_r \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}_{t-1} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

定义观测方程  $Y_t = [\theta_0, \dots, \theta_{r-1}] \mathbf{X}_t$ , 可验证  $Y_t$  满足前述 ARMA( $p, q$ ) 方程

## ARMA 过程状态空间表示：推导

- 从状态方程第二行开始可知  $X_{2t} = X_{1t-1}, \dots, X_{rt} = X_{r-1,t-1}$ , 故  

$$X_{jt} = X_{j-1,t-1} = \mathcal{L}X_{j-1,t} = \dots = \mathcal{L}^{j-1}X_{1t}$$
- 从状态方程第一行可知

$$X_{1t} = \phi_1 X_{1t-1} + \dots + \phi_r X_{r,t-1} + \varepsilon_t = (\phi_1 + \phi_2 \mathcal{L} + \dots + \phi_r \mathcal{L}^{r-1})X_{1t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow (1 - \phi_1 \mathcal{L} - \phi_2 \mathcal{L}^2 - \dots - \phi_r \mathcal{L}^r)X_{1t} = \varepsilon_t$$

- 观测方程可写为

$$Y_t = (\theta_0 + \theta_1 \mathcal{L} + \dots + \theta_{r-1} \mathcal{L}^{r-1})X_{1t}$$

两端乘以  $(1 - \phi_1 \mathcal{L} - \phi_2 \mathcal{L}^2 - \dots - \phi_r \mathcal{L}^r)$  可得

$$(1 - \phi_1 \mathcal{L} - \phi_2 \mathcal{L}^2 - \dots - \phi_r \mathcal{L}^r)Y_t = (\theta_0 + \theta_1 \mathcal{L} + \dots + \theta_{r-1} \mathcal{L}^{r-1})\varepsilon_t$$

## 本节内容

- 1 状态空间模型
- 2 Kalman 滤波**
- 3 Markov 区制转换模型

## Kalman 滤波：基本想法

- 给定状态空间模型

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{F}\mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{v}_t$$

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{H}^\top \mathbf{X}_t + \mathbf{A}^\top \mathbf{Z}_t + \mathbf{w}_t$$

- 通常假定  $\mathbf{Y}_t, \mathbf{Z}_t$  为已知观测序列,  $\mathbf{F}, \mathbf{H}, \mathbf{A}$  为已知矩阵, 而状态变量  $\mathbf{X}_t$  未知
- 问题: 如何从  $\{\mathbf{Y}_t, \mathbf{Z}_t\}$  推测  $\{\mathbf{X}_t\}$  的取值?
- 基本思路: 将上述问题转换为求解  $\mathbf{X}_t$  的最优线性预测问题

$$\hat{\mathbf{X}}_{t+1|t} = L(\mathbf{X}_{t+1} | \mathbf{Y}_t, \mathbf{Y}_{t-1}, \dots, \mathbf{Z}_t, \mathbf{Z}_{t-1}, \dots)$$

- Kalman 滤波算法, 给出了上述线性预测问题的递归解

## Kalman 滤波：初始值

- 令  $\mathbf{y}_t = [\mathbf{Y}_t^\top, \dots, \mathbf{Y}_1^\top, \mathbf{Z}_t^\top, \dots, \mathbf{Z}_1^\top]^\top$  为截止  $t$  的观测序列,  $\hat{\mathbf{X}}_{t+1|t} = L(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{y}_t)$
- Kalman 滤波算法递归地计算  $\hat{\mathbf{X}}_{1|0}, \dots, \hat{\mathbf{X}}_{T|T-1}$ , 以及每次预测的均方预测误差 (mean square error, MSE) 矩阵  $\mathbf{P}_{t+1|t} \equiv \mathbb{E}[(\mathbf{X}_{t+1} - \hat{\mathbf{X}}_{t+1|t})(\mathbf{X}_{t+1} - \hat{\mathbf{X}}_{t+1|t})^\top]$
- 初始值  $\hat{\mathbf{X}}_{1|0} = \mathbb{E}\mathbf{X}_1$ , 在状态方程平稳的假设下,  $\mathbb{E}\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}$ , 相应的 MSE 矩阵为无条件 (平稳) 协方差矩阵  $\mathbf{P}_{1|0} = \boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{E}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_1^\top$
- 一般的, 平稳条件下, 状态变量的协方差矩阵  $\boldsymbol{\Sigma}$  满足

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{E}\mathbf{X}_{t+1}\mathbf{X}_{t+1}^\top = \mathbb{E}[(\mathbf{F}\mathbf{X}_t + \mathbf{v}_{t+1})(\mathbf{F}\mathbf{X}_t + \mathbf{v}_{t+1})^\top] = \mathbf{F}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{F}^\top + \mathbf{Q}$$

- 借助  $\text{vec}$  与  $\otimes$  算符, 上述方程的解可表示为

$$\text{vec}(\boldsymbol{\Sigma}) = [\mathbf{I}_{r^2} - (\mathbf{F} \otimes \mathbf{F})]^{-1} \text{vec}(\mathbf{Q})$$

中间步骤 1: 预测  $\mathbf{Y}_t$ 

- 利用  $\hat{\mathbf{X}}_{1|0}$  和  $\mathbf{P}_{1|0}$  计算  $\hat{\mathbf{X}}_{2|1}$  和  $\mathbf{P}_{2|1}$ , 可以一般性表示为利用  $\hat{\mathbf{X}}_{t|t-1}$  和  $\mathbf{P}_{t|t-1}$  计算  $\hat{\mathbf{X}}_{t+1|t}$  和  $\mathbf{P}_{t+1|t}$ , 为此, 需要先计算  $\hat{\mathbf{Y}}_{t|t-1} = L(\mathbf{Y}_t | \mathbf{Z}_t, \mathbf{y}_{t-1})$
- 由  $L(\mathbf{Y}_t | \mathbf{Z}_t, \mathbf{X}_t) = \mathbf{H}^\top \mathbf{X}_t + \mathbf{A}^\top \mathbf{Z}_t$ , 并注意  $\mathbf{Z}_t$  与  $\mathbf{v}_t, \mathbf{v}_{t-1}, \dots$  无关, 进而与  $\mathbf{X}_t$  无关, 可知

$$\hat{\mathbf{Y}}_{t|t-1} = \mathbf{H}^\top L(\mathbf{X}_t | \mathbf{Z}_t, \mathbf{y}_{t-1}) + \mathbf{A}^\top \mathbf{Z}_t = \mathbf{H}^\top \hat{\mathbf{X}}_{t|t-1} + \mathbf{A}^\top \mathbf{Z}_t$$

- 相应的预测误差为  $\mathbf{Y}_t - \hat{\mathbf{Y}}_{t|t-1} = \mathbf{H}^\top (\mathbf{X}_t - \hat{\mathbf{X}}_{t|t-1}) + \mathbf{w}_t$ , 故 MSE 矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\mathbf{Y}_t - \hat{\mathbf{Y}}_{t|t-1})(\mathbf{Y}_t - \hat{\mathbf{Y}}_{t|t-1})^\top] &= \mathbb{E}[\mathbf{H}^\top (\mathbf{X}_t - \hat{\mathbf{X}}_{t|t-1})(\mathbf{X}_t - \hat{\mathbf{X}}_{t|t-1})^\top \mathbf{H}] + \mathbb{E} \mathbf{w}_t \mathbf{w}_t^\top \\ &= \mathbf{H}^\top \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{H} + \mathbf{R} \end{aligned}$$

中间步骤 2: 更新  $X_t$  当期预测值

- $X_t$  当期预测值为  $\hat{X}_{t|t} = L(X_t|Y_t, Z_t, \mathbf{y}_{t-1}) = L(X_t|\mathbf{y}_t)$ , 满足如下更新方程:

$$\hat{X}_{t|t} = \hat{X}_{t|t-1} + \mathbb{E}[(X_t - \hat{X}_{t|t-1})(Y_t - \hat{Y}_{t|t-1})^\top] \mathbb{E}[(Y_t - \hat{Y}_{t|t-1})(Y_t - \hat{Y}_{t|t-1})^\top]^{-1} (Y_t - \hat{Y}_{t|t-1})$$

- 由  $\mathbb{E}[(X_t - \hat{X}_{t|t-1})(Y_t - \hat{Y}_{t|t-1})^\top] = P_{t|t-1}H$  可知

$$\hat{X}_{t|t} = \hat{X}_{t|t-1} + P_{t|t-1}H(H^\top P_{t|t-1}H + R)^{-1}(Y_t - H^\top \hat{X}_{t|t-1} - A^\top Z_t)$$

- 相应的 MSE 矩阵  $P_{t|t} = \mathbb{E}[(X_t - \hat{X}_{t|t})(X_t - \hat{X}_{t|t})^\top]$  为

$$\begin{aligned} P_{t|t} &= \mathbb{E}[(X_t - \hat{X}_{t|t-1})(X_t - \hat{X}_{t|t-1})^\top] \\ &\quad - \mathbb{E}[(X_t - \hat{X}_{t|t-1})(Y_t - \hat{Y}_{t|t-1})^\top] \mathbb{E}[(Y_t - \hat{Y}_{t|t-1})(Y_t - \hat{Y}_{t|t-1})^\top]^{-1} \\ &\quad \times \mathbb{E}[(Y_t - \hat{Y}_{t|t-1})(X_t - \hat{X}_{t|t-1})^\top] \\ &= P_{t|t-1} - P_{t|t-1}H(H^\top P_{t|t-1}H + R)^{-1}H^\top P_{t|t-1} \end{aligned}$$



中间步骤 3: 预测  $X_{t+1}$ 

- 由状态方程可知  $\hat{X}_{t+1|t} = F\hat{X}_{t|t}$ , 故

$$\hat{X}_{t+1|t} = F\hat{X}_{t|t-1} + \underbrace{FP_{t|t-1}H(H^T P_{t|t-1}H + R)^{-1}}_{\equiv K_t: \text{称为增益矩阵}} (Y_t - H^T \hat{X}_{t|t-1} - A^T Z_t) \quad (1)$$

- MSE 矩阵  $P_{t+1|t} = \mathbb{E}[(X_{t+1} - \hat{X}_{t+1|t})(X_{t+1} - \hat{X}_{t+1|t})^T] = FP_{t|t}F^T + Q$ , 即

$$P_{t+1|t} = F[P_{t|t-1} - P_{t|t-1}H(H^T P_{t|t-1}H + R)^{-1}H^T P_{t|t-1}]F^T + Q \quad (2)$$

- 方程 (1)-(2) 构成 Kalman 滤波的递推计算公式

## 基于 Kalman 滤波的极大似然估计

- 在冲击项  $\{v_t, w_t\}$  及初始项  $X_1$  均为正态分布假设下，所有的线性预测都是最优预测，即条件期望
- 此外， $Y_t$  关于  $Z_t, \mathbf{y}_{t-1}$  的条件分布为

$$Y_t | Z_t, \mathbf{y}_{t-1} \sim N\left(\left(H^T \hat{X}_{t|t-1} + A^T Z_t\right), \left(H^T P_{t|t-1} H + R\right)\right)$$

- 由此可计算整个样本的对数似然函数

$$\sum_{t=1}^T \log f_{Y_t | Z_t, \mathbf{y}_{t-1}}(Y_t | Z_t, \mathbf{y}_{t-1})$$

并对状态空间模型参数  $F, H, A, Q, R$  进行极大似然估计

## 本节内容

- 1 状态空间模型
- 2 Kalman 滤波
- 3 Markov 区制转换模型**

## Markov 区制转换模型介绍

- 区制转换 (regime switching) 模型：时间序列  $\{X_t\}$  的动态变化方程，不但取决于  $X_t$  滞后期及白噪声冲击项，还取决于离散区制变量  $s_t \in S \equiv \{1, \dots, S\}$
- 典型例子：GDP 增速序列的时序变化，不但取决于滞后期，还取决于经济整体情况是扩张 (expansion) 期还是紧缩 (recession) 期，可用两区制  $s_t \in \{1, 2\}$  模型来描述
- Markov 区制转换 (MRS)：  $s_t$  的变化可以用一个 Markov 链（马氏链）来描述：给定当前区制取值  $s_t = i$ ，则下一期区制取值  $s_{t+1} \in S$  的（条件）分布  $\mathbb{P}(s_{t+1}|s_t = i)$  完全知晓

## Markov 链介绍

- Markov 链是一类应用最广泛的随机过程模型，其核心特征是给定当前状态  $s_t$ ，下期状态  $s_{t+1}$  的条件分布完全确定，即  $\mathbb{P}(s_{t+1} = j | s_t = i)$  完全确定
  - 此处  $s_t$  理解为一般的“状态”概念，而非前页区制
- 上述条件概率又称为（条件）转移概率 (transition probability)；若转移概率取值与  $t$  无关，只与前后两期的状态取值  $i, j$  有关，则称该 Markov 链为时齐 (time homogeneous) Markov 链，并将转移概率记做  $p_{ij} \equiv \mathbb{P}(s_{t+1} = j | s_t = i)$
- 转移概率可以写为  $S \times S$  矩阵  $\mathbf{P}$ ：

$$\mathbf{P} = [p_{ij}]_{1 \leq i, j \leq S} = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1S} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{S1} & \cdots & p_{SS} \end{bmatrix}$$

且  $\mathbf{P}$  满足每一行求和为 1； $\mathbf{P}$  成为转移矩阵 (transition matrix)

## 时齐 Markov 链的分布及动态演化

- 若  $t$  期状态  $s_t$  的分布为  $\pi_t = [\pi_{1t}, \dots, \pi_{St}]$ , 则由转移概率定义可知  $s_{t+1}$  的概率分布为

$$\mathbb{P}(s_{t+1} = j) = \sum_{i \in \mathcal{S}} \mathbb{P}(s_{t+1} = j, s_t = i) = \sum_{i \in \mathcal{S}} \mathbb{P}(s_t = i) \mathbb{P}(s_{t+1} = j | s_t = i) = \sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_{it} p_{ij}$$

- 写为矩阵形式, 可知

$$\pi_{t+1} = [\pi_{1t+1}, \dots, \pi_{St+1}] = \pi_t P$$

- 给定初始分布  $s_0 \sim \pi_0$ ,  $s_t$  的分布为  $\pi_t = \pi_0 P^t$ 
  - 有一整套关于 Markov 链极限分布 (limiting distribution) 的理论, 即分析  $\lim_{t \rightarrow \infty} P^t$  的性质

## 时齐 Markov 链的平稳分布

- 对转移矩阵为  $\mathbf{P} = [p_{ij}]_{i,j \in S}$  的时齐 Markov 链, 若分布  $\pi = [\pi_1, \dots, \pi_S]$  满足  $\pi = \pi \mathbf{P}$ , 则称  $\pi$  为该 Markov 链的平稳分布 (stationary distribution)
  - 平稳分布又称为不变分布 (invariant distribution)
- 平稳分布的涵义: 若  $s_t$  处于平稳分布, 则  $s_{t+\tau}$ ,  $\tau \geq 1$  的分布都为平稳分布, 即分布不再变化
- 考虑  $S = 2$  的时齐 Markov 链, 转移矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \rho & 1 - \rho \\ 1 - \rho & \rho \end{bmatrix}$$

其中  $\rho \in (0, 1)$ , 则可验证平稳分布  $\pi = [0.5, 0.5]$

## Markov 区制转换自回归模型

- 时间序列中，一类应用极广的区制转换模型为 Markov 区制转换  $p$ -阶自回归 (MRS AR( $p$ )) 模型，其一般形式可写为

$$X_t - \mu(s_t) = \phi_1(s_t)(X_{t-1} - \mu(s_{t-1})) + \cdots + \phi_p(s_t)(X_{t-p} - \mu(s_{t-p})) + \sigma(s_t)\varepsilon_t$$

其中  $s_t$  表示  $t$  期所处区制，为时齐 Markov 链； $\mu(\cdot)$ ,  $\phi_j(\cdot)$ ,  $\sigma(\cdot)$  为依赖于区制的截距项、自回归系数及白噪声标准差； $\{\varepsilon_t\}$  为 iid 白噪声序列，通常假设与  $\{s_t\}$  相互独立

- 这类模型可以描述时间序列中离散变化的水平值、自相关性、波动率跳跃
- MRS AR 模型通常都是用极大似然估计方法进行参数估计
  - 技术介绍可见 Hamilton (2016) “Macroeconomic Regimes and Regime Shifts,” Handbook of Macroeconomics, vol.2A, chapter 3



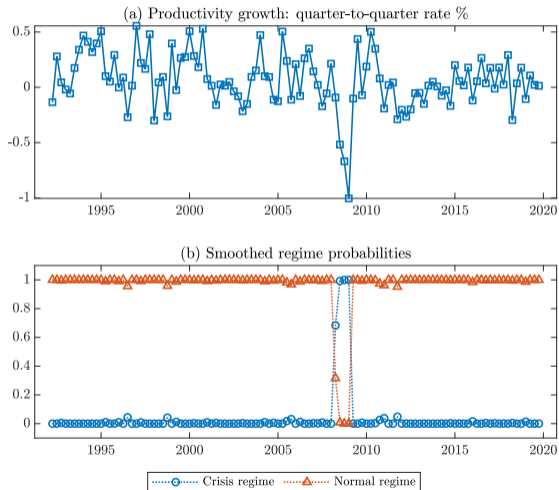
## MRS AR(1) 示例

- 很多国家的产出或生产率 (TFP 或劳动生产率) 会呈现区制转移特征：正常时期是一个区制，危机时期是一个区制
- 最简单的建模方式为 MRS AR(1) 模型：

$$X_t = (1 - \rho(s_t))\mu(s_t) + \rho(s_t)X_{t-1} + \sigma(s_t)\varepsilon_t$$

- 这类特定的模型可以用迭代 EM (expectations maximization) 算法大幅提高 MLE 的计算效率

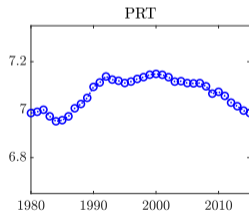
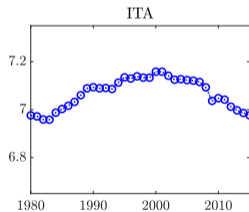
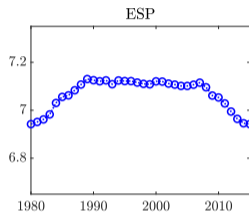
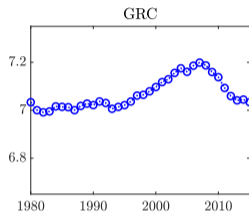
## 意大利劳动生产率增速序列的 MRS AR(1) 建模



## 估计结果

	$\mu(s)$	$\rho(s)$	$\sigma(s)$	$P$	$s' = 1$	$s' = 2$	不变分布
$s = 1$ 危机	-0.0336	0.9018	0.0009	$s = 1$	0.6633	0.3367	0.0372
$s = 2$ 正常	0.0009	0.2167	0.0020	$s = 2$	0.0130	0.9870	0.9628

## 欧债危机示例：GIPS 四国劳动生产率序列



# 欧债危机示例：GIPS 四国劳动生产率 MRS AR(1) 建模估计

