2021 秋季本科时间序列

第 1 次作业

提交日期：10 月 12 日

1. 给定两个独立的标准正态分布随机变量 X 和 Y。

   (a) 请写出其联合分布密度函数，并确定 $Z \equiv X/Y$ 的分布。提示：Z 是 Cauchy 分布。

   (b) 随机变量期望的定义要求该随机变量绝对值的期望小于无穷。请说明 Cauchy 分布期望不存在。

2. 考虑课件 4 第 11 页示例变体 $X_t = \cos(\frac{\pi}{n}t + U)$，其中 $U \sim \mathcal{U}([-\pi, \pi])$，$t \in \mathbb{Z}$，$n \in \mathbb{N}_+$ 即大于 0 的自然数。

   (a) 请计算 $\mathbb{E}X_t$ 和 $\sigma_X^2(k)$，$k \in \mathbb{N}$。

   (b) 请使用 R 或 Python 编程，随机生成一个 U，并对 $n = 1, \ldots, 5$，生成 $t = 1, \ldots, 1000$ 的样本值 $\{X_t\}_{t=1}^{1000}$。

      i. 绘制 $n = 1, \ldots, 5$ 这 5 个 $\{X_t\}$ 序列的前 100 项，并比较其有和不同。

      ii. 使用 ts 宏包的 ACF 函数，对 $n = 1, \ldots, 5$，计算 $\{X_t\}$ 的样本自协方差函数，并与理论值进行对比。

3. 给定 iid 样本 $\{X_i\}_{i=1}^N$，期望为 $\mathbb{E}X_i = \mu$，方差为 $\mathrm{var}(X_i) = \sigma^2$

   (a) 请说明样本方差

   $$\hat{\sigma}_N^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \hat{\mu}_N)^2$$

   的期望 $\mathbb{E}\hat{\sigma}_N^2 = \sigma^2$，其中 $\hat{\mu}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N X_i$ 为样本均值。提示：可以先将上述求和项按照 $(X_i - \mu + \mu - \hat{\mu}_N)^2$ 进行拆分，并分别求期望。

   (b) 请利用课件中的定理，说明样本方差 $\hat{\sigma}_N^2 \xrightarrow{\text{a.s.}} \sigma^2$。

4. 以下问题用于证明总体协方差版的 Cauchy-Schwartz 不等式。

   (a) 请查阅线性代数教科书或参考书，说明 $\mathrm{cov}(\cdot, \cdot)$ 是一个对称双线性函数。

   (b) 对任意 $a \in \mathbb{R}$ 以及两个随机变量 X 和 Y，利用 $\mathrm{var}(aX+Y) = \mathrm{cov}(aX+Y, aX+Y)$ 的展开式可看做 a 的 2 次函数以及上式恒大于等于 0 这个性质，证明 Cauchy-Schwartz 不等式：

   $$|\mathrm{cov}(X, Y)|^2 \le \sigma_X^2 \sigma_Y^2.$$

5. 以下问题用于证明样本协方差版的 Cauchy-Schwartz 不等式。

(a) 对两个 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$，定义内积函数 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$。请验证内积函数 $f(\cdot,\cdot)$ 为对称双线性函数。

(b) 仿照 4(b)，证明内积版 Cauchy-Schwartz 不等式：$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$，

$$|x_1y_1+\cdots+x_ny_n|^2\le(x_1^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+\cdots+y_n^2).$$

(c) 利用上述结论,证明两组样本观测值 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{Y_i\}_{i=1}^n$ 的样本协方差 $\hat{\sigma}_{XY}^2=\frac{1}{n}\sum_i(X_i-\hat{\mu}_X)(Y_i-\hat{\mu}_Y)$ 满足如下不等式：

$$\hat{\sigma}_{XY}^2\le\hat{\sigma}_X\hat{\sigma}_Y.$$

其中，样本方差也用 $\frac{1}{n}$ 定义，与第 3 题不同。

6. 对于绝对可和序列 $\{\phi_i\}_{i=0}^{\infty}$,请证明 $\sum_{i=k}^{\infty}\phi_i\phi_{i-k}$ 收敛,即 $\sum_{i=k}^{\infty}|\phi_i\phi_{i-k}|<\infty$,对任意 $k\in\mathbb{N}$ 成立。