国际金融试验班 2021 年秋 • 时间序列

第 3 讲：统计基础

授课人：刘　岩

武汉大学经管学院金融系

2021 年 9 月 14 日

本讲内容

本节内容

样本与总体：1-维情形

- 假设某个经济、金融变量为随机变量，分布为 F，有 n 个观测值 (observation) $X_1, \ldots, X_n$
- 称这组观测值为数据样本 (data sample)，简称样本
- 称 F 为总体分布 (population distribution)，简称总体
    - 例如 GDP 增速，每个季度的观测值就是样本；季度 GDP 增速的具体取值，如 2020Q4 的 6.8/7.2，称为样本的实现值 (realized value/realization)
- 统计学的出发点：数据样本总是从总体分布中抽样 (sampling) 得到
    - 从总体中的抽样过程，又称为数据生成过程 (data generating process, DGP)

样本与总体：多维情形

- 多个经济、金融变量，构成随机向量，联合分布为 F，有 n 个观测值 (observation) $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$
- 类似的，称这组向量观测值为样本，称 F 为总体
- 多个变量之间的相互关联，体现在总体分布 F 上
  - 每个季度的 GDP、消费、投资、政府支出、进口、出口满足下列关系
$$Y_t = C_t + I_t + G_t + EX_t - IM_t,$$
    则 $\boldsymbol{X}_t = [Y_t, C_t, I_t, G_t, EX_t, IM_t]^\intercal$ 为一个样本
- 与 1-维情形相同，样本从总体分布中抽样得到

样本的两重涵义

做为随机变量的样本

- 统计模型假设一组随机变量满足一个总体联合分布，按照这个分布，DGP 产生了一系列样本（观测值）$\mathcal{X} = \{X_i\}_{i=1}^n$
- 这一系列样本仍然视作随机变量：符合总体分布 F

作为观测取值的样本

- 在具体的应用中，数据 (data) 指样本 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 的具体实现值(realized value, realization)，或样本取值
- 有时为了明确区分样本随机变量和样本取值，将后者写作小写字母 $\{x_i\}_{i=1}^n$

统计的基本问题

- 假设有一个总体 F，但部分（或全部）特征未知
- 研究者观察到一组样本 $\mathcal{X} = \{\mathbf{X}_i\}_{1\leq i\leq n}$，并且知道这组样本来自 F，亦即这组样本对应的总体是 F
- 问题 1：如何从观察到的样本 $\mathcal{X}$ 估计 (estimate) F 的部分（或全部）特征？
- 问题 2：如果研究猜想 F 满足某种特征，如何从 $\mathcal{X}$ 来推断 (infer) 这个猜想的对错？

统计估计与推断的基本概念

- 假设样本的 $\{\boldsymbol{X}_t\}_{t=1}^T$ 所满足的统计模型为给定的总体分布

$$M_{\boldsymbol{\theta}} = \mathbb{P}\left(\{\boldsymbol{X}_t\}_{t=1}^T \middle| \boldsymbol{\theta}\right),$$

  但总体分布的具体性质未知，表示为参数 $\boldsymbol{\theta}$ 真实值 $\boldsymbol{\theta}_0$ 未知
- 基本任务：从样本 $\{\boldsymbol{X}_t\}_{t=1}^T$ 推测未知的真实值 $\boldsymbol{\theta}_0$
- 估计：从样本 $\{\boldsymbol{X}_t\}_{t=1}^T$ 获得 $\boldsymbol{\theta}_0$ 的估计值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T$
- 推断：由样本计算得到的 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T$ 判断 $\boldsymbol{\theta}$ 是否为特定取值 $\boldsymbol{\theta}_0$
- 误差：由于 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T$ 继承了样本的随机性，上述推断可能存在误差 $\Rightarrow$ 统计推断需要控制误差

本节内容

矩估计基础

- 矩估计 (moment estimation) 的想法：由样本 $\mathcal{X} = \{\boldsymbol{X}_t\}$ 计算样本矩 (sample moment) $\hat{m}(\mathcal{X})$，同时选择总体分布的参数 $\boldsymbol{\theta}$ 使得总体矩 (population moment) 与样本矩“最为”接近
  - 参数的矩估计值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 是样本的函数：$\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathcal{X})$，常简记为 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T$
- 示例：假设 $\{X_t\}_{t=1}^T \overset{\text{iid}}{\sim} U([0,a])$，$a$ 未知，则可以利用 $\{X_t\}$ 的样本均值来估计 a
  - X_t 的总体均值为 $a/2$，样本均值为 $\hat{\mu}_T = \frac{1}{T}\sum_t X_t$
  - a 的一个矩估计为 $\hat{a} = 2\hat{\mu}_T = \frac{2}{T}\sum_t X_t$
  - 也可以使用高阶矩进行估计
- 总体矩和样本矩之间的“距离”可以通过多种方式进行度量，如最小化平方误差

极大似然估计基础

- 假设样本 $\mathcal{X} = \{X_t\}_T$ 具有联合分布 $\mathbb{P}(\mathcal{X}|\boldsymbol{\theta})$
- 将给定样本取值时，联合分布的概率（离散型 r.v.）或密度（连续型 r.v.），称为该样本 $\mathcal{X}$ 的似然值 (likelihood)；似然值与总体分布参数 $\boldsymbol{\theta}$ 间的函数关系，称为似然函数(likelihood function)，记做 $L(\boldsymbol{\theta}|\mathcal{X})$
- 极大似然估计(maximum likelihood estimation)，是指给定样本 $\mathcal{X}$ 时，最大化似然函数值

$$\max_{\boldsymbol{\theta}} L(\boldsymbol{\theta}|\mathcal{X})$$

  的总体参数取值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T$
- 通常情况下，计算对数似然函数 $\log L(\boldsymbol{\theta}|\mathcal{X})$ 的最大值更为简便，且与最大化似然函数水平值等价 (Why?)

参数估计的基本性质

- 一致性 (consistency)：当样本增加时，参数估计值应该逼近真实值
$$\lim_{T\to\infty} \hat{\theta}_T = \theta_0.$$
通常而言，我们希望上述收敛是以概率 1 收敛，即几乎处处收敛
- 无偏性 (unbiasedness)：参数估计值，作为样本 $\mathcal{X}$ 的函数，在样本联合分布下的期望，等于真实值
$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\theta_T\right] = \theta_0.$$
- 经济、金融中，一致性比无偏性更为重要

本节内容

推断的逻辑

- 统计推断和悬疑破案有同样的问题：从已知事实（样本）推断未知真相（参数真实值）
- 真相的可能取值：可能有无穷多种可能，但至少是两种可能

$\Longrightarrow$ 即便是无穷多种可能，总可以使用二分法：把可能真相分为互不相交两组 G, B

- 推断的两种结论：支持 G/反对 B vs. 支持 B/反对 G
- 推断有误差 $\Rightarrow$ 4 种结果：

		真相 G	真相 B
推断	支持 G	正确	错误
推断	支持 B	错误	正确

统计假设与两类错误

- 将参数真实值（真相）分为互不相交的两类，等价于做两个相互排斥的假设 (hypothesis)
- 统计学的传统：将最希望被排除的假设，称为原假设 (null hypo.)；另一个假设，称为备择假设 (alternative hypo.)
  - 原假设又称为零假设，一般记做 H_0
  - 备择假设一般记做 H_1 或 H_a
- 假设检验 (hypo. testing)：通过检验决定是否支持假设
  - 第一类错误 (Type-I error)：在 H_0 成立时，支持 H_1
  - 第二类错误 (Type-II error)：在 H_1 成立时，支持 H_0

	H_0 成立	H_1 成立
支持 H_0		第二类错误
支持 H_1	第一类错误	

统计推断的原则：优先控制第一类错误

- 原假设是研究者最希望排除的假设

$\Rightarrow$ 优先控制住拒绝 H_0、接受 H_1 的可能错误

  - 如果嫌疑人真是个好人，我们希望尽可能避免将其判做坏人的情况 $\Rightarrow$ 减少冤假错案
  - 现代统计学诞生于英国，优先控制第一类错误受到英国普通法 (common law) “疑罪从无”原则的影响

- 统计推断就是一个决策过程

	好人	坏人
无罪		逍遥法外 第二类错误
有罪	冤假错案 第一类错误	

统计量、显著性水平与 p-值

- 如何支持/接受或反对/拒绝一个统计假设？
- 检验统计量 (test statistics)：从统计模型出发，从样本随机变量 $\mathcal{X}$ 构造一个统计量 ξ_T (r.v.) 并确定其在特定假设 H_x 下的分布 $\mathbb{P}(\xi_T|H_x)$
- 利用样本实现值，计算统计量取值 $\bar{\xi}_T$；若在 H_x 下观测到 $\bar{\xi}_T$ 的概率 $\mathbb{P}(\xi_T=\bar{\xi}_T|H_x)$ 小于某个临界值，则拒绝该假设
- 该临界值称为该检验的显著性水平 (significance level)
  - 常用取值包括 1%、5%、10%
- 观测到 $\bar{\xi}_T$ 的概率 $\mathbb{P}(\bar{\xi}_T|H_x)$ 本身，称为检验假设 H_x 的 p-值 (p-value)

均值 t-检验：简单情形

- 最常见的假设检验为均值 t-检验，简称 t-检验 (t-test)
- 考虑两个 iid 序列 $\{X_t\}_{t=1}^T$ 与 $\{Y_t\}_{t=1}^T$ 分别服从总体分布 $N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$
- 简化假设：μ_X, μ_Y 未知，但 σ_X, σ_Y 已知
- 需要检验的原假设为 $H_0 : \mu_X = \mu_Y \Leftrightarrow H_0 : \mu_X - \mu_Y = 0$
- 计算可知，两个样本均值 $\hat{\mu}_X, \hat{\mu}_Y$ 分别服从如下分布

$$\hat{\mu}_X \sim N\left(\mu_X, \tfrac{1}{T}\sigma_X^2\right), \quad \hat{\mu}_Y \sim N\left(\mu_Y, \tfrac{1}{T}\sigma_Y^2\right)$$

- 选取统计量为 $\xi_T = \hat{\mu}_X - \hat{\mu}_Y$，在 H_0 下 ξ_T 的分布为

$$\xi_T = \hat{\mu}_X - \hat{\mu}_Y = N\left(\mu_X - \mu_Y, \tfrac{1}{T}(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)\right) = N\left(0, \tfrac{1}{T}(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)\right)$$

均值 t-检验：简单情形

- 带入样本 $\{X_t, Y_t\}$ 取值，可计算统计量 ξ_T 的取值 $\bar{\xi}_T$
- 考虑如下概率，Φ 为标准正态 cdf：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|\xi_T| \geq |\bar{\xi}_T|) &= \mathbb{P}\left(\frac{|\xi_T|}{\sigma(\xi_T)} \geq \frac{|\bar{\xi}_T|}{\sigma(\xi_T)}\right) \\ &= 2\Phi\left(-\frac{|\bar{\xi}_T|}{\sigma(\xi_T)}\right)\end{aligned}$$

- 若 $|\bar{\xi}_T|$ 较大，说明观察到 $\xi_T \leq -|\bar{\xi}_T|$ 或 $\xi_T \geq |\bar{\xi}_T|$ 概率很小
- 此时若拒绝 $H_0 : \mu_X = \mu_Y$，出现第一类错误的概率很小！
- $\frac{\bar{\xi}_T}{\sigma(\xi_T)}$ 称为 <u>t-统计量</u> (t-statistic)

大样本 t-检验与标准误

- 考虑 iid 样本 $\{X_t\}_{t=1}^{T}$，服从总体分布 $N(\mu_X, \sigma_X^2)$
- 假设此时 μ_X, σ_X^2 均为未知，并考虑原假设 $H_0 : \mu_X = \mu_0 \equiv 0$
- 自然的想法：检验样本均值 $\hat{\mu}_T$ 是否显著不同于 $\mu_0 = 0$
- H_0 之下，$\hat{\mu}_T = \frac{1}{T}\sum_t X_t$ 的分布为 $N\left(\mu_0, \frac{1}{T}\sigma_X^2\right) = N\left(0, \frac{1}{T}\sigma_X^2\right)$

$$\Rightarrow \frac{\hat{\mu}_T}{\frac{1}{\sqrt{T}}\sigma_X} \sim N(0,1) \Rightarrow \text{统计量}\xi_T = \frac{\hat{\mu}_T}{\frac{1}{\sqrt{T}}\hat{\sigma}_{X,T}} \xrightarrow{\text{d}} N(0,1)$$

  其中，$\hat{\sigma}_{X,T}^2 = \frac{1}{T}\sum_t (X_t - \hat{\mu}_T)^2$ 为 σ_X^2 的一致估计
- ξ_T 为 $\hat{\mu}_T$ 的<u>标准化</u> (standardization)，有极限分布 $N(0,1)$
- $\hat{\mu}_T$ 的样本标准差 $\frac{1}{\sqrt{T}}\hat{\sigma}_{X,T}$ 称为<u>标准误</u> (standard error)