

国际金融试验班 2021 年秋 · 时间序列

第 2 讲：概率基础

授课人：刘 岩

武汉大学经管学院金融系

2021 年 9 月 7 日

本讲内容

- 1 概率空间
- 2 1-元随机变量
- 3 多元随机变量
- 4 独立性

符号体系

- 数字: a, b, c 或 α, β, γ
- 数系: 实数 \mathbb{R} , 有理数 \mathbb{Q} , 整数 \mathbb{Z} , 自然数 \mathbb{N}
- 向量-矩阵: 列向量 x , 矩阵 X , 转置 x^T, X^T , 行列式 $\det X$
- 集合: 简单情形时, 如 A, B ; 多类符号混用时, 如 \mathcal{A}, \mathcal{B}
- 集合运算: 交 $A \cap B$, 并 $A \cup B$, 补 A^c , 空集 \emptyset
- 函数: $f(\cdot), F(\cdot)$ 或 $\Phi(\cdot)$
- 概率算符: 概率 \mathbb{P} , 期望 \mathbb{E} , 方差 var , 协方差 cov
- 一般算符: 如滞后算符 \mathcal{L}
- 数学表达: 任意 \forall , 存在 \exists , 属于 \in , 包含于 \subset

本节内容

- 1 概率空间
- 2 1-元随机变量
- 3 多元随机变量
- 4 独立性

概率空间：样本空间

概率空间 (probability space), 即三元组 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

- ① Ω : 样本空间 (sample space), 一个集合, 其元素为各种可能发生的随机状况
 - 如抛硬币, $\Omega = \{H, T\}$, 正面、反面; 又如 GDP 增速 (百分比), $\Omega = [-100, \infty)$
 - 样本空间中的点一般记做 $\omega \in \Omega$, 称为样本点 (sample point) 或随机元 (random point)
 - 从经济、金融角度看, ω 称为状态 (state), Ω 称为状态空间 (state space) 更合适

概率空间：事件域

- ② \mathcal{F} : 事件域 (event field), 是 Ω 的部分或全部子集的集合; 每个这样的子集表示一个随机事件 (event)
 - 抛硬币, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{H\}, \{T\}, \{H, T\}\}$
 - GDP 增速, $\mathcal{F} = \{\Omega \text{ 中的开、闭区间及其交、并、补集}\}$; 具体例子: 高增长事件 = $\{\omega > 8\}$, 低增长事件 = $\{0 \leq \omega < 6\}$, 适度增长 = $\{6 \leq \omega \leq 8\}$

注 数学上, 事件域 \mathcal{F} 称为 σ -域, 满足下列要求

- $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$
- $\forall A \in \mathcal{F}, A^c \in \mathcal{F}$
- $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

事件域：集合运算的涵义

事件域 \mathcal{F} 是集合——随机事件——的集合

- 并集：给定 $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cup B$ 表示事件 A 或 B 至少发生其一的事件
 - 高增长事件 \cup 适度增长事件 $= \{\omega \geq 6\}$, 表示 GDP 增速处于适度或高增速状态
- 交集： $A \cap B$ 表示事件 A 和 B 同时发生的事件
- 补集： A^c 表示事件 A 没有发生

练习 解释 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 和 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 的涵义

概率空间：概率测度

- ③ \mathbb{P} : 概率测度 (probability measure), 简称概率; 给出事件域 \mathcal{F} 中每个事件的可能性大小; 可看做函数 $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, 满足两条性质
- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \mathbb{P}(\Omega) = 1$
 - 给定 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$, 且 $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i, j = 1, \dots, \infty$, 则

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

这一性质又称概率测度的可数可加性 (countably additive)

练习 考虑 $\Omega = [0, 1]$, \mathcal{F} 为其所有区间及其可数并、补集的集合, 令 $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ 为 \mathcal{F} 上的函数, 取值为 $\mu([a, b]) = (b - a)^2$, $\forall 0 \leq a < b \leq 1$. 请问 μ 是概率测度吗?

本节内容

- 1 概率空间
- 2 1-元随机变量**
- 3 多元随机变量
- 4 独立性

随机变量：定义

给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

- 随机变量 (random variable, r.v.) X 是从 Ω 到实数的一个函数, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
 - $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 表示随机变量可以取值正负无穷; 但后续不考虑
 - 抛硬币示例: $\omega = H, T$, 定义 $X(H) = 0, X(T) = 1$, 则 X 的 0-1 取值反映正负面
 - GDP 增速示例: $\omega \in [-100, \infty)$, 定义 $X(\omega) = \omega$, 则 ω 即表示状态又表示 GDP 增速随机变量的取值
- 这个函数需要满足可测 (measurable) 的要求:

$$\underbrace{\{\omega : X(\omega) \leq x\}}_{\text{事件}} \in \mathcal{F}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

练习 上面两个例子满足可测性吗?

随机变量：分布函数

给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 及其上的一个随机变量 X

- 根据定义, $\forall x \in \mathbb{R}$, 事件 $\{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$, 故 \mathbb{P} 可给出该事件的概率
- $\forall x \in \mathbb{R}$, 称

$$F(x) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \leq x\})$$

为 X 的累积分布函数 (cumulative distribution function, CDF), 简称为分布函数

- $\{\omega : X(\omega) \leq x\}$ 一般简记为 $\{X \leq x\}$
- 分布函数单调递增: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, 若 $x < y$, 则 $F(x) \leq F(y)$
 - F 可能出现跳跃; 但利用概率 \mathbb{P} 的可数可加性, 可说明 F 右连续、左极限存在 (稍微复杂些的[练习](#))
- 分布函数左 0 右 1: $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$

随机变量：离散型

给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 及其上的一个随机变量 X

- 如果 X 取值是离散的 (discrete), 如抛硬币中 $X = 0, 1$, 则称 X 为离散型 r.v.; X 的取值集合可以有限, 也可以是可数集 (无穷)
 - 若 X 取值集合为 $\{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$, 则其分布函数 F 是一个阶梯函数, 在 x_i 处往上跳跃
 - 此时, 通常用 $p_i = \mathbb{P}(X = x_i) = F(x_i) - F(x_i-)$ 表示 X 的分布; $F(x_i-) = \lim_{x \uparrow x_i} F(x)$ 表示左极限
- 除此之外, X 取值可以是连续的 (continuous), 如 GDP 增速; 或更一般的离散、连续混合

随机变量：连续型

给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 及其上的一个随机变量 X

- 一般来说，当 X 取值连续时，其分布函数也可以有跳跃
 - 高速公路上汽车行使速度的分布在限速位置就有跳跃——很多汽车保持在限速，但也有部分超过或者低于限速
- 一类特别的连续取值 r.v.: X 称为连续型 r.v., 如果其分布函数 F 可写为另一个非负函数 f 的积分

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy$$

此时称 f 为 X 的密度函数 (density function, DF)

随机变量：密度函数与分布函数

给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的连续型 r.v. X , CDF F , DF f

- 此时 F 一定是连续函数
- 在非精确意义下, $f(x) = F'(x)$
 - F 不一定是处处可微, 但一定是“几乎”处处可微
- $\forall a < b$,

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(y)dy$$

特别的, $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(-\infty \leq X \leq \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy$

练习 继续第 8 页练习中的 Ω, \mathcal{F} , 令 $\mathbb{P}([a, b]) = b^2 - a^2$, 请问 \mathbb{P} 是概率测度? 并定义 $X(\omega) = \omega \in \Omega$, 求 X 的 CDF 及 DF

1-元随机变量：常见分布

很多情况下，有了 r.v. 的 CDF 或 DF 后，我们不必再关心 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 本身；r.v. 的概率/统计信息都在分布中

- 典型离散分布，r.v. X ，取值集合记为 \mathcal{V}
 - 两点分布，又称 Bernoulli 分布： $\mathcal{V} = \{0, 1\}$ ， $\mathbb{P}(X = 0) = p$
 - 二项式分布： $\mathcal{V} = \{0, 1, \dots, n\}$ ， $\mathbb{P}(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$ ，
 $\binom{n}{i} = \frac{n!(n-i)!}{i!}$ ， $p \in (0, 1)$
 - Poisson 分布： $\mathcal{V} = \mathbb{N} \equiv \{0, 1, \dots\}$ ， $\mathbb{P}(X = i) = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$ ， $\lambda > 0$
- 典型连续分布
 - 均匀分布 $U([a, b])$ ： $\mathcal{V} = [a, b]$ ， $f(x) = \frac{1}{b-a}$
 - 正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ： $\mathcal{V} = \mathbb{R}$ ， $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$
 - 指数分布 $\exp(\lambda)$ ： $\mathcal{V} = \mathbb{R}_+ \equiv [0, \infty)$ ， $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ， $\lambda > 0$

1-元随机变量：矩

给定 r.v. X 及其 CDF F

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, 定义 X 的 α -阶矩 (moment):

$$\mathbb{E}[X^\alpha] = \int x^\alpha dF(x)$$

积分限由 X 的取值范围 \mathcal{V} 决定

注 上面的积分可理解为 Riemann-Stieltjes 积分

- 与 $g(x)$ 为被积函数的 Riemann 积分定义中对 x 进行分划, 令 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \rightarrow 0$, 取离散和 $\sum_k g(x_k)\Delta x_k$ 极限类似, 此处对 $\sum_k g(x_k)\Delta F(x_k) = \sum_k g(x_k)[F(x_k) - F(x_{k-1})]$ 取极限
- 对离散型 r.v., 上述积分自然转化为离散和 $\sum_i x_i^\alpha p_i$
- 对连续型 r.v., 形式上 $dF(x) = f(x)dx$, 上述积分化为常规 Riemann 积分形式 $\int x^\alpha f(x)dx$

1-元随机变量：期望与方差

- X 的 1-阶矩称为 X 的期望 (expectation), 记做 $\mathbb{E}X$ 或 μ_X
- X 的方差 (variance) 定义为

$$\text{var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2]$$

又称为 2-阶中心矩

练习 证明 $\text{var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2$

- X 的标准差 (standard deviation) 定义为 $\sigma_X = \sqrt{\text{var}(X)}$

练习 计算上述 6 个典型分布的期望、方差和标准差

本节内容

- 1 概率空间
- 2 1-元随机变量
- 3 多元随机变量**
- 4 独立性

多元随机变量：联合分布

给定 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 及其上定义的 n 个 r.v. X_1, \dots, X_n

- 多元随机事件： $\{X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n\}$ 表示 $\{X_1 \leq x_1\}, \dots, \{X_n \leq x_n\}$ n 个事件同时发生，即

$$\{X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n\} = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \{X_i \leq x_i\} \in \mathcal{F}$$

- $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, X_1, \dots, X_n 的联合累积分布函数 (joint CDF) 定义为

$$F(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$$

简称为联合分布 (joint distribution)

多元随机变量：离散型

给定 n 个 r.v. X_1, \dots, X_n

- 离散型： $\forall i, X_i$ 为离散取值；此时 X_1, \dots, X_n 的联合分布就是一个 n -维数组 $\{p_{i_1, \dots, i_n}\}$ ，其中

$$p_{i_1, \dots, i_n} = \mathbb{P}(X_1 = x_{i_1}, \dots, X_n = x_{i_n})$$

x_{i_k} 表示 X_k 的第 i_k 个取值

- 注意和联合累计分布之间概念上的差别
- 2-元离散随机变量 X, Y 对应的分布可表示为一个矩阵 $[p_{ij}]$ ，其中 $p_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$

多元随机变量：连续型

给定 n 个 r.v. X_1, \dots, X_n

- 连续型：此时联合分布可以写为非负函数 $f(y_1, \dots, y_n)$ 的多元积分

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \cdots dy_n$$

f 称为 X_1, \dots, X_n 的联合密度函数 (joint DF)

- 与 1-元情形类似，非精确意义下

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}$$

多元随机变量：边缘分布

给定 n 个 r.v. X_1, \dots, X_n 及联合分布 F

- X_i 的边缘分布 $F_i(x_i)$ 仍然定义为 $\mathbb{P}(X_i \leq x_i)$, 其与联合分布的联系为

$$\begin{aligned} F_i(x_i) &= \mathbb{P}(\{X_i \leq x_i\} \cap \Omega \cap \dots \cap \Omega) \\ &= \mathbb{P}\left(\{X_i \leq x_i\} \cap \bigcap_{j \neq i} \{X_j \leq \infty\}\right) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq \infty, \dots, X_i \leq x_i, \dots, X_n \leq \infty) \\ &= F(\infty, \dots, x_i, \dots, \infty) \end{aligned}$$

练习 对 2-元离散 r.v. X, Y 及联合分布 p_{ij} , 将 X 的边缘分布 p_i 写为 p_{ij} 的求和形式

练习 对 2-元连续 r.v. X, Y 及联合密度 $f(x, y)$, 将 X 的边缘分布 F_X 写为 f 的 2-元积分形式

多元随机变量：混合矩

给定 n 个 r.v. X_1, \dots, X_n 及联合分布 F

- $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, 令 $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]$, 则 X_1, \dots, X_n 的混合 α -阶矩定义为

$$\mathbb{E}[X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}] = \int x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} dF(x_1, \dots, x_n)$$

此处亦可理解为多元 Riemann-Stieltjes 积分

注 1-元情形下, $dF(x)$ 对应离散和中的项为

$F(x + \Delta x) - F(x) = \mathbb{P}(X \in [x, x + \Delta x])$, 即 X 处于 x 附近的概率; 多元情形下, $dF(x_1, \dots, x_n)$ 表示 X_1, \dots, X_n 处于 (x_1, \dots, x_n) 附近的概率

多元随机变量：离散/连续型分布下的混合矩

- 离散情形：混合矩可写为多重求和

$$\mathbb{E}[X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}] = \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_n} x_{i_1}^{\alpha_1} \cdots x_{i_n}^{\alpha_n} p_{i_1, \dots, i_n}$$

- 连续情形：混合矩可写为多重积分

$$\mathbb{E}[X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}] = \int \cdots \int x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

- 一般的多元 r.v. 混合矩用处有限；重要的是 2-元随机变量的混合 2-阶矩

2-元随机变量：协方差及相关系数

给定 r.v. X, Y 及其联合分布 $F(x, y)$

- X, Y 的 混合 2-阶矩 (cross moment) 定义为

$$\mathbb{E}[XY] = \int xy dF(x, y)$$

- X, Y 的 协方差 (covariance) 定义为

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)]$$

练习 证明 $\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$

- X, Y 的 相关系数 (correlation) 定义为 $\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

随机向量：均值

将 r.v. X_1, \dots, X_n 列为一个列向量 $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_n]^T$

- 该向量称为随机向量 (random vector)
- 以 $\mathbb{E}\mathbf{X}$ 表示各分量的期望组成的列向量

$$\boldsymbol{\mu}_X \equiv \mathbb{E}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}X_1 \\ \vdots \\ \mathbb{E}X_n \end{bmatrix}$$

随机向量：协方差矩阵

- 矩阵

$$\Sigma_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \text{cov}(X_1, X_1) & \cdots & \text{cov}(X_1, X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(X_n, X_1) & \cdots & \text{cov}(X_n, X_n) \end{bmatrix}$$

称为 \mathbf{X} 的协方差矩阵 (covariance matrix)

- 注意区分矩阵 Σ 与求和号 Σ
- 多元正态分布: $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_n] \sim N(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}, \Sigma_{\mathbf{X}})$, 令 $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$, 其密度函数为

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \det \Sigma_{\mathbf{X}}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}})^T \Sigma_{\mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}) \right\}$$

随机向量：协方差矩阵的简化表示

由定义 $\text{cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}X_i)(X_j - \mathbb{E}X_j)]$, 可将 Σ_X 改写为

$$\begin{aligned} \Sigma_X &= \mathbb{E} \begin{bmatrix} (X_1 - \mathbb{E}X_1)(X_1 - \mathbb{E}X_1) & \cdots & (X_1 - \mathbb{E}X_1)(X_n - \mathbb{E}X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_n - \mathbb{E}X_n)(X_1 - \mathbb{E}X_1) & \cdots & (X_n - \mathbb{E}X_n)(X_n - \mathbb{E}X_n) \end{bmatrix} \\ &= \mathbb{E} \begin{bmatrix} X_1 - \mathbb{E}X_1 \\ \vdots \\ X_n - \mathbb{E}X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 - \mathbb{E}X_1 & \cdots & X_n - \mathbb{E}X_n \end{bmatrix} \\ &= \mathbb{E}[(X - \mu_X)(X - \mu_X)^T] \\ &= \mathbb{E}[XX^T] - \mu_X \mu_X^T \end{aligned}$$

随机向量：线性变换

给定 n -维随机向量 $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_n]^\top$ 和 $m \times n$ 常数矩阵 A

- $\mathbf{Y} = A\mathbf{X}$ 是一个 m -维随机向量
- \mathbf{Y} 的期望是 \mathbf{X} 的线性变换

$$\boldsymbol{\mu}_Y = \mathbb{E}\mathbf{Y} = \mathbb{E}A\mathbf{X} = A\mathbb{E}\mathbf{X} = A\boldsymbol{\mu}_X$$

- \mathbf{Y} 的协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_Y$ 可写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}_Y &= \mathbb{E}[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^\top] - \boldsymbol{\mu}_Y\boldsymbol{\mu}_Y^\top \\ &= \mathbb{E}[A\mathbf{X}\mathbf{X}^\top A^\top] - A\boldsymbol{\mu}_X\boldsymbol{\mu}_X^\top A^\top \\ &= A\left(\mathbb{E}[\mathbf{X}\mathbf{X}^\top] - \boldsymbol{\mu}_X\boldsymbol{\mu}_X^\top\right)A^\top \\ &= A\boldsymbol{\Sigma}_X A^\top\end{aligned}$$

本节内容

- 1 概率空间
- 2 1-元随机变量
- 3 多元随机变量
- 4 独立性**

随机变量独立性：定义

- 给定 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ，两个事件 $A, B \in \mathcal{F}$ 若满足

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

则称为独立 (independent) 事件

- 给定 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的两个 r.v. X, Y ，若 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 满足

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y)$$

则称两个 r.v. 相互独立

- 若 X, Y 相互独立，则其联合分布 F 为两个边缘分布 F_X, F_Y 的乘积

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

随机变量独立性：性质

给定两个独立的 r.v. X, Y

- $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为两个函数，则 $f(X), g(Y)$ 相互独立
 - 严格说，需要 f, g 满足可测性条件
- 乘积的期望等于期望的乘积

$$\mathbb{E}[XY] = \int xy dF(x, y) = \int xy dF_X(x) dF_Y(y) = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$$

- 协方差为 0,

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = 0$$

故相关系数为 0

随机变量独立性：多元一般情形

给定 r.v. X_1, \dots, X_n

- 若 $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, 满足

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq x_i)$$

则称 X_1, \dots, X_n 相互独立

- 若 X_1, \dots, X_n 相互独立, 则 $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ 相互独立,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_1 \cdots X_n] &= \int x_1 \cdots x_n dF(x_1, \dots, x_n) \\ &= \int x_1 \cdots x_n dF(x_1) \cdots dF(x_n) = \mathbb{E}X_1 \cdots \mathbb{E}X_n \end{aligned}$$

大数定律 (law of large number, LLN)

定理 1

当 $\{X_t\}$ 为独立同分布 (independent and identical distribution, iid) 随机变量序列时, 样本均值以概率 1 收敛到总体均值

$\mu \equiv \mathbb{E}X_t$:

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t(\omega) = \mu\right\}\right) = 1,$$

记做

$$\hat{\mu}_T \equiv \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu,$$

其中, a.s. 表示 almost surely, 意为几乎一定; 以概率 1 收敛, 又称为几乎处处 (almost everywhere) 收敛

中心极限定理 (central limit theorem, CLT)

- 考虑 iid 样本 $\{X_t\}$, 期望为 μ , 方差为 σ^2
- 由大数定律, $\hat{\mu}_T - \mu = T^{-1} \sum_t (X_t - \mu) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$
- 计算可得, $\text{var}(\hat{\mu}_T) = \sigma^2/T$, 故 $\hat{\mu}_T$ 的标准化

$$\xi_T = \frac{\hat{\mu}_T - \mu}{\sqrt{\text{var}(\hat{\mu}_T)}} = \frac{T^{-1} \sum_t (X_t - \mu)}{\sqrt{T}^{-1} \sigma} = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \frac{X_t - \mu}{\sigma}$$

方差为 1

定理 2

假设有 iid 序列 $\{X_t\}$, 则其标准化样本均值 $\xi_T \xrightarrow{d} N(0, 1)$, 或等价的, $\sqrt{T}(\hat{\mu}_T - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$, 其中 \xrightarrow{d} 表示依分布收敛

CLT: Monte Carlo 模拟示例

