高级微观经济学

第 5 讲：非合作博弈基础

授课人：刘岩

武汉大学经管学院金融系

2022 年 11 月 8 日

本节内容

简要历史

博弈论研究的是多个决策者在策略互动 (strategic interactions) 环境下的决策行为

- 博弈论的思想源远流长：中国古代的兵法
- 经济的例子伴随着近代工业化厂商竞争行为的发展而出现：
  - Antoine A. Cournot，1838，数量竞争；
  - Joseph L. F. Bertrand，1883，价格竞争；
    Francis Y. Edgeworth，1889，严格的模型 (+ 产量限制)
- John von Neumann & Oskar Morgenstern, 1944,
  Theory of Games and Economic Behavior.
  奠定现代博弈论的基础

现代发展：Nobel 奖历史

1969 至 2022，54 次 Nobel 奖，92 名得主中有 15 名的主要得奖工作在博弈论及其直接应用方面，仅次于宏观经济学 (共 20 名，1990 年后共 10 名)

1994 John C. Harsanyi, John F. Nash, Reinhard Selten

1996 James A. Mirrlees, William S. Vickrey

2005 Robert J. Aumann, Thomas C. Schelling

2007 Leonid Hurwicz, Eric S. Maskin, Roger B. Myerson

2012 Alvin E. Roth, Lloyd S. Shapley

2014 Jean Tirole

2016 Oliver Hart, Bengt Holmström

2020 Paul Milgrom, Robert Wilson

Shapley 的贡献

It is a truth universally acknowledged that much that is fundamental and beautiful in the field of Game Theory has been shaped, and nurtured over the years, by Lloyd Shapley. One need merely name topics where his work was seminal and path-breaking, and served to define entire areas of research: the value (with finite and continuum player sets), core, voting games and power indices, stochastic games, repeated games, matching, potential games, market games in coalitional and strategic form, the convergence phenomenon for perfectly competitive economies (core and value in the coalitional setting, and non-cooperative equilibrium in the strategic), convex games, fictitious play, etc.

Dubey and Tauman, 2012

本节内容

博弈论的两大分支

非合作博弈 (non-cooperative game)

- 注重从单个决策者的策略选择出发，详细规定各决策者策略互动的过程和影响，一般通过均衡概念把个体最优化决策加总，从而预测博弈结果
- 决策者互不交流单独决策，但对均衡有一致预期

合作博弈 (cooperative game)

- 从决策者策略互动可能的结果出发，并规定一个合适的“解”所应满足的性质——特别是对决策者联盟 (coalition) 具有如“稳定”或“公平”的性质，从而预测博弈结果
- 决策者交流协商，寻求合作

非合作博弈的策略形式和扩展形式

策略形式 (strategic form)，亦称正规形式 (normal form)

- 参与者集合 $\mathcal{I} = \{1, \ldots, I\}$
- 参与者 i 的策略集 S_i；$S = S_1 \times \cdots \times S_I$
- 参与者 i 的收益函数 $u_i : S \to \mathbb{R}$
- 所有参与者同时做出策略选择，形成 $s = (s_1, \ldots, s_I) \in S$
- $\Gamma = (\mathcal{I}, S, (u_i)_{i \in \mathcal{I}})$ 称为一个博弈的策略形式

扩展形式 (extensive form)

- 策略形式 + 信息结构 (information structure)
- 信息结构可以用树状结构表示；博弈树 (game tree)

一个 EF 对应一个 SF；一个 SF 可对应多个 EF

策略形式博弈与 Nash 均衡

给定策略形式博弈 $\Gamma = (I, S, (u_i)_{i \in I})$

- 若一个策略组 (strategy profile)$s = (s_i, \ldots, s_I)$ 满足一定条件，则称为 Γ 的解
  - 严格占优 (strict dominance，剔除严格劣势策略)，重复严格占优 (iterative SD)，可理性化 (rationalizability)，相关均衡 (correlated equilibrium)
- 应用最广的还是 Nash 均衡：策略组 s 若满足

$$s_i \in \operatorname*{argmax}_{t \in S_i} u_i(s|_i t)$$

对任意 $i \in I$ 成立，则称其为 Nash 均衡

  - 均衡是这样一组策略：给定所有其他人选择这组策略，我没有动力改变目前的策略选择

混合策略

- 策略形式博弈最基本的情形是有限纯策略：所有 S_i 均有限；此时 S_i 中每个备选策略称为纯策略
- 有限纯策略基本的问题是 Nash 均衡可能不存在；但若使用 von Neumann & Morgenstern 引入的混合策略(mixed strategy)，则存在性不是问题
- 给定有限纯策略集 S_i，一个混合策略 σ_i 是 S_i 上的一个概率分布；混合策略的集合记为

$$\Sigma_i = \left\{\sigma_i : \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1, \sigma_i(s_i) \geq 0\right\}.$$

- 总假设各个参与者的混合策略是相互独立的

混合策略下的 Nash 均衡

- 给定混合策略组 $\sigma = (\sigma_i)_{i\in I} \in \Sigma = \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_I$，则 i 的期望收益为

$$U_i(\sigma) = \mathbb{E}^\sigma u_i = \sum_{s\in S} \prod_{j\in I} \sigma_j(s_j) u_i(s),$$

  $\prod_{j\in I} \sigma_j(s_j) = \sigma_1(s_1)\cdots\sigma_I(s_I)$ 表示纯策略组 $s = (s_j)_{j\in I}$ 出现的概率 (σ_j 互相独立)

- 混合策略组 $\sigma \in \Sigma$ 称为策略博弈 $\Gamma = (I, S, (u_i)_{i\in I})$ 的一个 (混合策略) Nash 均衡，若对所有 $i \in I$ 有

$$\sigma_i \in \operatorname*{argmax}_{\tau\in\Sigma_i} U_i(\sigma|_i\tau),$$

  其中 $\sigma|_i\tau$ 表示混合策略下 i 的单方面偏离

Nash 均衡的存在性

定理 1

若策略形式博弈 $\Gamma = (I, S, (u_i)_{i\in I})$ 中每个参与者的纯策略集 S_i 均有限，则一定存在混合策略 Nash 均衡

证明.

$U_i(\sigma)$ 连续，关于 σ_i 线性，故拟凹；又可直接验证 Berge 最大值定理条件得到满足，故 $\beta_i(\sigma) = \mathrm{argmax}_{\tau\in\Sigma_i} U_i(\sigma|_i\tau)$ 是 $\Sigma \rightrightarrows \Sigma_i$ 的上半连续、紧致、凸对应，进而 $\beta(\sigma) = (\beta_1(\sigma), \ldots, \beta_I(\sigma))$ 是 $\Sigma \rightrightarrows \Sigma$ 的上半连续、紧致、凸对应，最后由 Kakutani 不动点定理知存在 $\sigma^* \in \beta(\sigma^*)$ □

经典的例子

- 囚徒悖论：

	否认	招供
否认	5,5	0,10
招供	10,0	2,2

均衡为 (招供, 招供) 是 Pareto 无效的

- 可以理解为一种策略外部性 (strategic externality)：自利个体的行为导致整体无效率
    - 古话：以邻为壑

Cournot 数量竞争

- 考虑两家企业，生产同质产品，成本函数为 cy_i，$i = 1, 2$，即两企业边际成本均为 $c > 0$
- 产品需求函数为 $d = D(p) = A - p$，$A > c$，相应的反需求函数为 $p = A - d$
- 两个企业采取数量竞争的形式：具体而言，若两个企业的产量决策为 y_1, y_2，则市场价格为 $p = A - y_1 - y_2$
- Cournot 竞争博弈：两个企业同时选择产量水平
- 此时唯一的 Nash 均衡产量水平为 y_1^c, y_2^c，则总产出 $y^c = y_1^c + y_2^c$ 小于垄断企业产量选择 y^m
- 拓展：多个厂商 (市场集中度 HHI 的理论基础)，固定成本，非对称生产技术 (边际成本)，产能投资，一般的需求函数形式

Stackelberg 数量竞争

- 继续考虑上述两家企业
- 假设企业 1 首先选择产量 y_1，而企业 2 在观察到 y_1 之后选择产量 y_2
    - Stackelberg 博弈的策略形式与 Cournot 博弈的策略形式完全相同，差别在于扩展形式，即行动时点及参与者的信息
- 此时有唯一的 Nash 均衡产量水平 y_1^s, y_2^s，且 $y_1^s > y_2^s$，即存在领先者优势
    - 领先者优势 (leader's advantage)：预见到对手的策略选择，从而确保自己的策略更占优
- 拓展：Cournot 博弈的拓展全部适用；以及更多的动态、不对称信息拓展，如阻止竞争对手市场进入的极限定价 (limit pricing)
    - 一个系列重要的拓展在宏观经济学和动态政治经济学建模：动态的政策/政治互动，可以用动态 Stackelberg (重复) 博弈来刻画

Bertrand 价格竞争

- 考虑两个企业进行价格而非数量竞争
- 假设两个企业同时选择价格水平 p_1, p_2：若 $p_i < p_j$，则 i 获得所有市场需求；若两个企业出价相等 $p_1 = p_2$，则均分此时的市场需求
  - Bertrand 博弈与 Cournot 博弈同样是同时行动(simultaneous move) 博弈，即其扩展形式与策略形式完全相同
  - 如果改为 Stackelberg 式的扩展形式，一个厂商先选价格，后一个厂商再选，结果有何差别？
- 该价格竞争博弈有唯一的 Nash 均衡 $p_1^b = p_2^b = c$，此时均衡产出 $y^b = y_1^b + y_2^b$ 高于 y^m, y^c, y^s
  - 此时又称为边际成本定价，按照古典经济学的观点，认为达到了社会有效产(socially efficient) 出水平
- 拓展：Cournot 博弈拓展同样适用，而不对称信息下的价格竞争，形成了一整套的拍卖 (auction) 理论

本节内容

完美信息重复博弈 (repeated game with perfect information)

- 给定一个策略形式博弈 $\Gamma = (I, S, (u_i)_{i\in I})$
- 同样的参与者 I 每期都重复参与一次 Γ，$t = 0, \ldots, T$
- $T < \infty$：有限期重复博弈；$T = \infty$，无限期重复博弈
- Γ 称为阶段博弈 (stage game)
- 完美信息体现在两方面：1. Γ 本身是完美信息；2. 任何参与者都可以在每期结束时观测到其对手的策略，且所有的策略组历史信息也是完美的

重复博弈的策略

- 不同于单次博弈 (one-shot game)，对策略历史的完美信息为每一期的参与者做出策略选择提供了额外的可能性
- 为明确起见，Γ 中的策略集称为行动集 (action set)，记为 $A = A_1 \times \cdots \times A_I$
- $t = 0$ 时的策略集 $S_0 = A$，策略组 $s_0 = (s_{01}, \ldots, s_{0I})$ 对应的行动组为 $a_0 = (a_{01}, \ldots, a_{0I}) = (s_{01}, \ldots, s_{0I})$
- 对 $t \geq 1$，把过去出现行动组称为 t 时的历史 $h^t = (a_{t-1}, \ldots, a_0) \in A^{t-1}$；补充定义 $h^0 = \varnothing$
- $t \geq 1$ 时的策略定义为映射 $s_t = (s_{t1}, \ldots, s_{tI}) : A^{t-1} \longrightarrow A$，$h^t \mapsto a_t = s_t(h^t)$

重复博弈的收益

- 给定所有参与者的策略组 $s = (s(1), \ldots, s(I))$，其中 $s(i) = (s_{0i}, s_{1i}, \ldots)$
- s 确定了一条路径 (path)：$h^\infty = (a_0, a_1, \ldots)$
- t 期 i 的收益为 $u_i(a_t)$；h^∞ 确定了其收益的序列
- 我们总考虑折现重复博弈 (RG with discounting)：所有参与者有同样的折现率 $\delta \in [0, 1)$
- 则 s 对应的 i 的折现支付为

$$U_i(s) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u_i(a_t).$$

重复博弈的均衡

- 给定 $\Gamma = (I, A, (u_i)_{i\in I})$，对应的折现重复博弈记为 $\Gamma^\infty = (I, A, (u_i)_{i\in I}, \delta, \infty)$
- 记 i 的策略集为 S_i；$S = S_1 \times \cdots \times S_I$ 则 Γ^∞ 也可写作 $(I, S, (U_i)_{i\in I})$
- 同样的 Nash 均衡的定义也适用于 Γ^∞；只是此时任何参与者的单方面偏离可以有非常复杂的形式
- 更一般的，我们希望重复博弈的均衡具有某种时间一致性：给定均衡策略 s，我们希望当重复博弈从 t 期重新开始时，s 还是均衡
- 这样的性质也可以大大简化对均衡的分析

子博弈完美均衡 (subgame-perfect equilibrium)

- 给定时间 t 和历史 $h^t = (a_{t-1}, \ldots, a_0)$，则从 h^t 往未来继续的博弈称为 Γ^∞ 的子博弈，记为 $\Gamma^\infty|h_t$
- 给定策略组 $s = (s(i))_{i \in I}$，称 $s(i)|h^t$ 为参与者 i 的策略在 h^t 上的限制；并记为 $s|h^t = (s(i)|h^t)$
- 称 s 为子博弈完美均衡，若对于任意的历史 h^t，$s|h^t$ 是子博弈 $\Gamma^\infty|h^t$ 的 Nash 均衡
- 换句话说：沿着 s 诱导的均衡路径 h^∞，任何时候任何参与者 i 都不想偏离其均衡策略 $s(i)$

子博弈完美均衡 (SPE) 的基本性质

- 为检验一个策略组 s 是否是 SPE，只需要考察是否存在单次偏离 (one-shot deviation) 的可能性
- 给定参与者 i 的策略 $s(i)=(s_{it})_{t=0,\dots,\infty}$，单次偏离是指如下形式的偏离：$s(i)|_t\hat{s}=(\dots,s_{it-1},\hat{s},s_{it+1},\dots)$，其中 $\hat{s}:A^{t-1}\to A_i$
- 在绝大部分应用中，我们甚至只需要考虑惩罚策略即可
- 在囚徒困境的例子中，惩罚策略如下：对任意 t 和 $\tau\geq 0$

$$s_{it+\tau}=\begin{cases}\text{否认，} & \text{若前一期对手也否认指控}\\ \text{永远招供，} & \text{若前一期对手招供}\end{cases}$$

- 均衡策略与均衡结果，与折现率 δ 密切相关——无名氏 (folklore) 定理：当 δ 足够高时，重复博弈中的参与者总有实现策略合作的可能