经济增长理论 2024

作业 3-4

提交时间：6 月 25 日

1. 考虑第 10 讲课件第 6-8 页的两期模型。假设效用函数为 CRRA 形式：

$$u(c)=\begin{cases}\dfrac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}, & 若\sigma\neq 1\\ \ln c, & 若\sigma=1\end{cases}$$

   生产函数保持 CD 形式不变。请推导此时家庭的最优储蓄决策，即 Euler 方程，并确定此时储蓄率的表达式。

   解：此时$u'(c)=c^{-\sigma}=1/c^{\sigma}$，Euler 方程可写为

$$\frac{1}{(w-K)^{\sigma}}=\frac{\beta\alpha K^{\alpha-1}}{K^{\alpha\sigma}}=\frac{\alpha\beta}{K^{\alpha\sigma+1-\alpha}}$$

   该方程一般条件下没有解析解，但很容易判断K关于β的单调性，即$\frac{\partial K}{\partial\beta}>0$。

2. 考虑第 10 讲 RCK 模型，请利用$\Delta\tilde{k}=0$的条件，计算确定最大化消费时资本选择黄金法则$\tilde{k}^{GB}$所满足的一阶条件，进而利用$\Delta\tilde{c}=0$的条件，说明稳态资本$\tilde{k}^{*}<\tilde{k}^{GB}$。

   解：见习题课黑板推导。

3. 考虑第 11 讲 Romer 模型。请说明新资本品价格$P_A<\infty$的充要条件为$r>n$，并说明此时模型求解所得研发部门劳动占比$s_R<1$。

   解：$r>n$时，几何级数求和项$(1+n)/(1+r)<1$，故收敛。$r>n$时，s_R表达式分母大于 0，故$s_R<1$。

4. 考虑第 12 讲 Schumpeter 模型。请推导第 14 页P_A的表达式，并说明最后的近似在什么条件下成立。

   解：依然使用几何级数求和公式。n,r,γ都可以当做小量处理，故可忽略乘积高阶小量。

5. 考虑第 13 讲 Malthus 模型，对第 12 页基准模型，写出$L_t=f(L_t)$的模型动态函数f的表达式，在L-L坐标系中画出f的关键特征，说明f与 45 度线的唯一交点为L^*，进而证明若$L_0<L^*$，则均衡序列$\{L_t\}$单调递增收敛到L^*。

   解：利用$(L_{t+1}-L_t)/L_t=\theta(BX^{\beta}/L_t^{\beta}-\underline{c})$，可得

$$L_{t+1}=f(L_t)=\theta\left(\frac{BX^{\beta}}{L_t^{\beta}}-\underline{c}\right)L_t+L_t=\theta BX^{\beta}L_t^{1-\beta}-\left(\theta\underline{c}-1\right)L_t$$

   由$\beta<1$可知$f(0)=0$，且$f'(L)=\theta BX^{\beta}(1-\beta)L^{-\beta}-\left(\theta\underline{c}-1\right)$，故$\lim\limits_{L\to 0}f'(L)=\infty$, $\lim\limits_{L\to\infty}f'(L)=1-\theta\underline{c}<1$。进一步由$f''(L)=-\theta BX^{\beta}(1-\beta)\beta L^{-\beta-1}<0$，可

知$f(L)$为严格凹函数。综上，$f(L)$与45°线交于一点L^*，故可知$L_0 < L^*$时，$L_t < L_{t+1} < L^*, \forall t \geq 0$，且$\lim_{t \to \infty} L_t = L^*$。