经济增长理论 2024

作业 2

提交时间：6 月 25 日

1. 在第 9 讲课件第 4 页的基础假设下（不假设生产函数为 CD 形式），参考第 9 讲课件第 9 页图示方法，说明稳态人均资本k^*关于δ, n的比较静态性质，即δ, n各自变化时，对应的k^*如何变化。

   答：略。

2. 在第 1 问的基础上，对稳态资本的定义方程$(n+\delta)k^* = sf(k^*)$，利用隐函数定理，直接计算k^*关于δ, n, s的偏导数，说明k^*关于这三个参数的单调性结论与图示论证的结论一致。

   答：略。

3. 参考第 9 讲第 11 页图示，说明当$k_0 > k^*$时，均衡路径$\{k_t\}$呈现什么特征，资本增速及产出增速路径又有何特征？

   答：$k_t > k_{t+1} > k^*, \forall t \geq 0$，且$\lim_{t\to\infty} k_t = k^*$。

4. 考虑带人口增速n的 Solow 模型，在其中引入人力资本，即将加总生产函数写为$Y_t = K_t^\alpha H_t^\beta (A_t L_t)^{1-\alpha-\beta}$，其中$H$代表人力资本，$\alpha, \beta > 0$且$\alpha + \beta < 1$，$A_t$为劳动扩充生产技术，增长率为常数$\gamma$。类似物质资本$K_t$的积累方程$K_{t+1} = sY_t + (1-\delta)K_t$，加总人力资本$H_t$每期有折旧（存量技能逐渐淘汰），但同样可以通过每期投入一定的产出（收入）$s_H Y_t$进行积累（可理解为教育投资），即$H_{t+1} = s_H Y_t + (1-\delta_H)H_t$，其中$s_H, \delta_H$为常数。请模仿基准 Solow 模型的分析，定义恰当的去除趋势的变量$\hat{k}, \hat{y}$等，并计算确定去除趋势的模型的稳态，进而得到模型的人均资本、人均产出、人均人力资本的增长路径。

   答：只需定义$\hat{x}_t = X_t/(A_t L_t)$，$X = K, Y, H$，则有

$$y_t = \frac{Y_t}{A_t L_t} = \left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^\alpha \left(\frac{H_t}{A_t L_t}\right)^\beta = \hat{k}_t^\alpha \hat{h}_t^\beta \tag{1}$$

$$(1+n)(1+\gamma)\hat{k}_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{A_t L_t} = \frac{sY_t}{A_t L_t} + (1-\delta)\frac{K_t}{A_t L_t} = s\hat{y}_t + (1-\delta)\hat{k}_t \tag{2}$$

$$(1+n)(1+\gamma)\hat{h}_{t+1} = \frac{H_{t+1}}{A_t L_t} = \frac{s_H H_t}{A_t L_t} + (1-\delta_H)\frac{H_t}{A_t L_t} = s_H\hat{y}_t + (1-\delta_H)\hat{h}_t \tag{3}$$

将(1)代入(2)-(3)得到

$$(1+n)(1+\gamma)\hat{k}_{t+1} = s\hat{k}_t^\alpha \hat{h}_t^\beta + (1-\delta)\hat{k}_t \tag{4}$$

$$(1+n)(1+\gamma)\hat{h}_{t+1} = s_H\hat{k}_t^\alpha \hat{h}_t^\beta + (1-\delta_H)\hat{h}_t \tag{5}$$

稳态均衡中，$\hat{k}_t = \hat{k}_{t+1} = \hat{k}^*, \hat{h}_t = \hat{h}_{t+1} = \hat{h}^*, \hat{y}^* = \left(\hat{k}^*\right)^{\alpha}\left(\hat{h}^*\right)^{\beta}$，此时(4)-(5)变为

$$(n+\gamma+n\gamma+\delta)\hat{k}^* = s\hat{y}^* \tag{6}$$

$$(n+\gamma+n\gamma+\delta_H)\hat{h}^* = s_H\hat{y}^* \tag{7}$$

由此可解出$\hat{h}^* = \frac{s_H}{s}\frac{n+\gamma+n\gamma+\delta}{n+\gamma+n\gamma+\delta_H}\hat{k}^*$，再代入(6)中替代$\hat{y}^* = \left(\hat{k}^*\right)^{\alpha}\left(\hat{h}^*\right)^{\beta}$可得

$$(n+\gamma+n\gamma+\delta)\hat{k}^* = s\left(\frac{s_H}{s}\frac{n+\gamma+n\gamma+\delta}{n+\gamma+n\gamma+\delta_H}\right)^{\beta}\left(\hat{k}^*\right)^{\alpha+\beta}$$

$$\Longrightarrow \left(\hat{k}^*\right)^{1-\alpha-\beta} = \left(\frac{s}{n+\gamma+n\gamma+\delta}\right)^{1-\beta}\left(\frac{s_H}{n+\gamma+n\gamma+\delta_H}\right)^{\beta}$$

$$\Longrightarrow \hat{k}^* = \left(\frac{s}{n+\gamma+n\gamma+\delta}\right)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}}\left(\frac{s_H}{n+\gamma+n\gamma+\delta_H}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}$$

进而可得到

$$\hat{k}^* = \left(\frac{s}{n+\gamma+n\gamma+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}\left(\frac{s_H}{n+\gamma+n\gamma+\delta_H}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\beta}}$$