高级微观经济学

第 8 讲：不完美信息扩展博弈

授课人：刘岩

武汉大学经管学院金融系

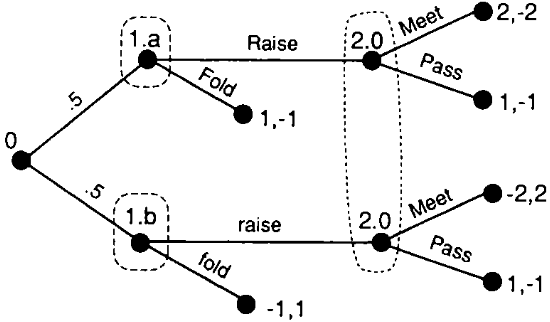
2024 年 11 月 11 日

本讲内容

1. 不完全信息博弈基础理论
   - 基本示例
   - 共同知识
2. 不完全信息扩展博弈
   - 序贯理性
   - 序贯均衡的经典例子
   - 常用的精炼模式

本节内容

德州扑克的例子：Myerson (1991, ch. 2, pp.37–42)



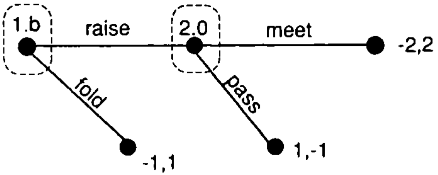
0 点表示 Nature 发牌，玩家 1 以 0.5 的概率随机拿到大/小牌，玩家 2 也同时收到发牌，虚线框表示信息集，Fold 扑牌认输，Raise 加牌加注，Meet 跟牌跟注，Pass 弃牌认输，最多两轮开牌，最终结点 (6 个) 的向量表示玩家 1/2 收益

不完全信息与不完美信息

- 前一个例子可以理解为不完美信息 (imperfect information) 扩展形式博弈
  - 尤其是从局外人 (outsider) 的角度，对博弈进行观察或分析
- 从局内人 (insider) 的角度看，更合适的概念是不完全信息 (incomplete information)：玩家 1 不知道对家什么牌，玩家 2 也不知道对家什么牌，而拿牌情况直接决定了最终输赢和收益
  - 玩家 1 在选择加注或扑牌时，不知道对家的牌；玩家 2 在选择跟牌或弃牌时，也不知道对家的牌，即玩家 2 不知道自己处在虚线框信息集中的哪一个结点上
- 不完全信息博弈：每个参与者都可能有若干类型，具体类型由 Nature 随机确定，且各个参与者不知道对手的类型是什么，此时的博弈称为不完全信息博弈
  - 同样可以区分扩展形式不完全信息博弈与策略 (或正规) 形式不完全信息博弈
  - 不完全信息扩展博弈可以用不完美信息扩展博弈 (树) 来表示

不完全信息的含义：德扑的例子

- 德扑例子中，玩家 2 在做决策时，必须考虑到玩家 1 拿到大牌和小牌两种可能
  - 如果旁观者看到玩家 1 拿到小牌，则博弈蜕化为



  - 此时玩家 1 显然应该 fold，否则玩家 2 选择 meet 的结果对玩家 1 更差
- 如果玩家 2 考虑到玩家 1 的牌有大牌和小牌两种可能，并且看到玩家 1 选择了 raise，那么玩家 2 如何思考？
  - 一个可能是思路：玩家 2 想玩家 1 很有可能是拿了大牌，所以才 raise，那么这个时候，最优选择就不再是 meet，而是 pass！

共同知识：概念的引入

- 在不完全信息博弈中，每个参与者知道什么，不知道什么，对手方有什么样的不确定性，对博弈的结果具有关键影响
- “知道什么”的入门体验
  1. 玩家 1 知道大牌小牌的概率是 0.5
  2. 玩家 1 知道玩家 2 知道大牌小牌的概率是 0.5
     - 如果玩家 1 知道玩家 2 知道大牌的概率是 0.999，那么玩家 1 可以推断玩家 2 大概率不会 meet，则玩家 1 即便拿到小牌，也可以选择 raise
     - 注意此时是玩家 2 知道大牌的概率是 0.999，玩家 2 并不确定玩家 1 知道大牌的概率是 0.999
  3. 玩家 1 知道玩家 2 知道玩家 1 知道大牌小牌的概率是 0.5
     - 如果玩家 1 知道玩家 2 知道玩家 1 知道大牌的概率是 0.999，那么玩家 1 会推断玩家 2 会推断玩家 1 一定是拿到大牌才选择 raise，故玩家 1 选择 raise 时，玩家 2 一定 pass

  $\cdots$ (玩家 1 知道玩家 2 知道)^k 玩家 1 知道，$\forall k = 0, 1, 2, \ldots$

共同知识：概念与性质

- Harsanyi (1967, 1968a,b) 系统引入了不完全信息博弈的概念，同时意识到需要对博弈中 i 知道 j 知道……等“参与者都知道的信息”做出系统假设
- Aumann (1976) “Agree to Disagree” 一文提出共同知识 (common knowledge) 的定义：给定一组参与者 $I = \{1, \ldots, I\}$，一个事件 E 称为共同知识，如果
  1. 每个参与者都知道 E
  2. 每个参与者都知道每个参与者知道 E

  $\cdots$ (每个参与者都知道)^k 每个参与者知道 E，$k = 0, 1, 2, \ldots$

定理 1 (Agree to Disagree? NO)

如果所有参与者的先验概率 (prior) 相同，并且各参与者关于某事件 E 的后验概率 (posterior) 是共同知识，则这些后验概率必相等

Aumann 共同知识定理的解释

- Aumann 定理：如果大家先验信念一致，那么关于一件成为共同知识的事件的后验概率必然相等，无论各自对该事件的直接信息有多少差别
- Aumann 定理的证明并不复杂，其核心在于用概率论 (概率空间) 的语言，把共同知识这一概念明确表示出来
- 一个例子：$P1/P2$ 关于一枚硬币正面朝上的先验概率信念 p 满足 $[0,1]$ 上的均匀分布，且各自抛过一次硬币，分别看到正面朝上与反面朝上
  - 如果两人都只知道自己抛硬币的结果，则关于下一次抛硬币正面朝上事件的后验概率分别为 $2/3, 1/3$
  - 但如果两人充分交流各自的后验概率，使得两人的后验概率成为共同知识，则两人关于下次硬币正面朝上的后验概率将修正为相同的 $1/2$
  - 后验概率的交流，包含各自观测所得的信息；所有的信息集合，也是共同知识

共同知识、私人信息、共有知识

- 一个博弈中，除共同知识外，各个参与者掌握的信息，称为私人信息 (private information)，如德扑例子中玩家 1 自己牌的大小
- 共有知识 (mutual knowledge)：每个参与者都知道 E，但 i 不知道 j 知道 E，i 不知道 j 不知道 i 知道 E
  - 微信朋友圈：i 发布朋友圈，j,k 点赞，则 i 知道 j,k 知道该朋友圈；但 i 不一定知道 j 知道 k 知道该朋友圈，除非 j 回复了 k 的留言或 k 回复了 j 的留言
  - 微信社交网络结构：好友认识你，但好友不知道其他人是否是你的好友，……

疯狗寓言

- 一个村子 50 家每家有一条狗，每家都知道别家的狗是不是疯狗，但不会告知这家人；然而每家不知道自家是否是疯狗；如果发现自家的狗是疯狗，则当即自行无害化
  - 村民每天在固定时间集会，如果自家的狗无害化处理了，则会告知全村
    - 事实上，村里全是疯狗，但因为不“多管闲事”，所以每家都不知道自己的狗是疯狗，全村一直“和谐宁静”
  - 一天，村里来了一个受信赖的外村人，对全体村民说：“村里有一条疯狗”
  - 第 1 天，没有动静；第 2 天，没有动静；……；第 49 天，依然没有动静
  - 第 50 天，会发生什么？

疯狗寓言

- 如果村民都知道正好有一只疯狗，那么第一天集会结束，疯狗的主人就知道自己的狗是疯狗
  - 如果村民都知道正好有 k 只疯狗，则第 k 天集会结束，k 个主人就自行动手
- 如果没有外村人，那么关于疯狗的知识就不是共同知识
  - 第 1 家知道第 2 家有疯狗，第 1 家知道第 2 家知道第 3 家有疯狗，……，第 1 家知道……第 49 家知道第 50 家有疯狗
  - 但第 1 家不知道第 2 家知道……第 50 家知道第 1 家有疯狗
- 外村人的话，让“村里有一条疯狗”成为了共同知识！
  - 到了第 49 天，依然没人在集会上通报自己家的狗是疯狗，但村里又的确有一条疯狗，那么唯一的可能，就是自家的狗是疯狗

Bayes-Nash 博弈

- Harsanyi (1967, 1968a,b) 将各个参与者所掌握的收益相关 (payoff relevant) 私人信息称为参与者的类型 (type)，参与者 i 的类型记为 $t_i \in T_i$，其中 T_i 称为类型空间 (type space)，进而定义 Bayes-Nash 博弈 $\Gamma = (I, T, S, (u_i)_{i \in I})$
- Harsanyi 假设类型 $t = (t_1, \ldots, t_I) \in T \equiv T_1 \times \cdots \times T_I$ 为一个随机变量，各参与者关于 t 的分布有共同的先验概率 (或密度) 信念 $p(t)$，且 t 的分布为共同知识
- 在此基础上，参与者 i 根据自己掌握的信息 (类型 t_i) 计算其他参与者 $t_{-i} = (t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{t+1}, \ldots, t_I)$ 的后验概率 (密度) $p(t_{-i}|t_i)$
- 每个参与者的策略是其类型 t_i 到行动空间 A_i 的映射 $s_i : T_i \to A_i$，其策略空间记为 S_i，策略组记为 $s(t) = (s_1(t_1), \ldots, s_I(t_I)) \in A \equiv A_1 \times \cdots \times A_I$
- 类型 t_i 的参与者 i 在行动组 $a = (a_1, \ldots, a_I)$ 处的收益为 $u_i(a|t_i)$，给定类型 t 及策略组 $s(t)$，相应的收益为 $u_i(s(t)|t_i)$

Bayes-Nash 均衡

- 类型为 t_i 的参与者 i 的期望收益为

$$V_i(s|t_i) = \int_{t_{-i}} u_i(s(t)|t_i)p(t_{-i}|t_i)\mathrm{d}t_{-i} = \int_{t_{-i}} u_i(s_1(t_1),\dots,s_I(t_I)|t_i)p(t_{-i}|t_i)\mathrm{d}t_{-i}$$

- Bayes-Nash 均衡：给定均衡策略组 $s(t) = (s_1(t_1),\dots,s_I(t_I))$，任一参与者 i 在任何类型 t_i 下，都没有单方偏离动机

$$s_i(t_i) = \operatorname*{argmax}_{\varsigma(\cdot)\in S_i} V_i(s_1,\dots,s_{i-1},\varsigma,s_{i+1},\dots,s_I|t_i)$$

- 该均衡常简称为 Bayes 均衡 (Bayesian equilibrium)

Bayes-Nash 均衡：混合策略情形

- 上述定义期望收益 V_i 的定义很容易扩展到各参与者使用混合策略
- 类型 t_j 的参与者 j 选择混合策略 $\sigma_j(t_j) = p(\cdot|t_j) \in \Delta(A_j)$，此处 $\Delta(A_j)$ 表示 A_j 上的一个分布，则混合策略组

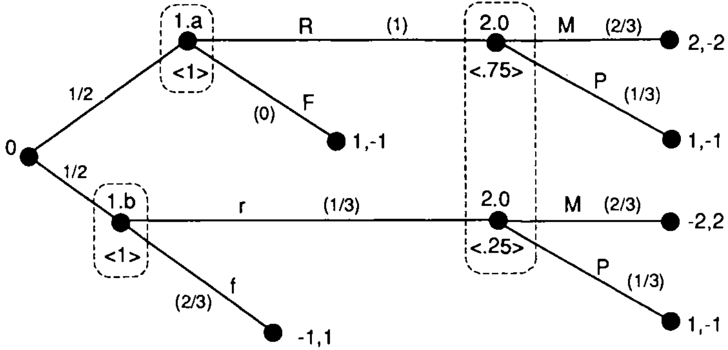
$$\sigma(t) = (\sigma_1(t_1), \ldots, \sigma_I(t_I)) = p(\cdot|t) = (p_1(\cdot|t_1), \ldots, p_I(\cdot|t_I)) \in \Delta(A)$$

为总行动空间 A 上的一个分布，$p_i(a_i|t_i)$ 表示 t_i 选 a_i 的概率 (密度)

- 相应的期望收益定义为

$$\begin{aligned}
V_i(\sigma|t_i) &= \int_{t_{-i}} \left(\int_a u_i(a|t_i) p(a|t) \mathrm{d}a \right) p(t_{-i}|t_i) \mathrm{d}t_{-i} \\
&= \int_{t_{-i}} \left(\int_a u_i(a_1, \ldots, a_I|t_i) p_1(a_1|t_1) \cdots p_I(a_I|t_I) \mathrm{d}a \right) p(t_{-i}|t_i) \mathrm{d}t_{-i}
\end{aligned}$$

德扑例子：唯一 Bayes-Nash 均衡



玩家 1 如果拿到大牌，则以概率 1 选择 raise，如果拿到小牌，则以概率 1/3 选择 raise，2/3 选择 fold；玩家 2 以概率 2/3 选择 meet，1/3 选择 pass

- 注意，玩家 2 知道对家大小牌两种可能，概率均为 1/2，并以此计算期望收益

本节内容

1 不完全信息博弈基础理论

2 不完全信息扩展博弈
- 序贯理性
- 序贯均衡的经典例子
- 常用的精炼模式

信念系统 (belief system)

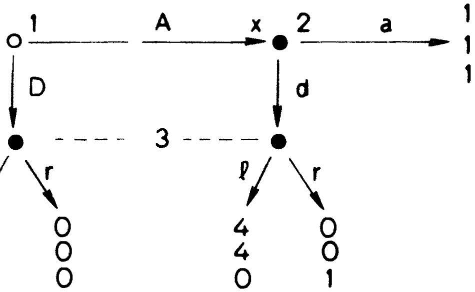
给定一个不完美信息扩展博弈，亦即存在信息集 I 包含多于一个结点，并给定参与者策略组 σ，即在各结点的行动选择 (可包含混合策略)

- 当一个信息集 I 包含多于一个结点时，该信息集的决策者需要形成一个关于其所处结点的 (条件) 概率分布 $\mu(h), h \in I$，才能计算其在该结点所做决策的期望效用
  - 前例中，玩家 2 根据玩家 1 的大小牌分布及其策略选择，计算自己所处信息集两个结点的条件概率，分别为 $3/4$ 和 $1/4$
- 所有参与者持有相同的信念系统 μ
- 该分布 μ 称为一个**信念系统**
- μ 与 σ 共同确定了整个博弈树上达到各个结点的概率分布，进而对每个参与者可以计算期望效用 $\mathbb{E}^{\mu,\sigma}u_i$

序贯理性 (sequential rationality)

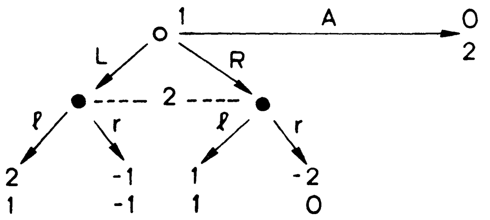
- 序贯理性要求给定所有对手的策略选择 σ_{-i} 和信念系统 μ，参与者 i 的策略选择 σ_i 需要在所有 i 做决策的信息集上都是最优的
- 简言之，序贯理性要求每一轮决策时所选策略都是给定所处状态下最优
- 子博弈完美 Nash 均衡 (SPNE) 即满足序贯理性
- 由于引入了 μ，序贯理性的适用范围比 (SPNE) 要广

序贯理性的例子 1



策略组 (D, a, ℓ) 是一个 Nash 均衡，但并不“合理”：SPNE 不适用于这个均衡，但序贯理性可以：给定 1 和 3 的策略，2 在其信息集 (单点集 $\{x\}$) 会选择 d

序贯理性的例子 2



策略组 (A, r) 是一个 Nash 均衡，但并不“合理”：序贯理性在 1 的单点信息集得到满足；而对任意信念 μ (关于 2 的信息集 $\{L, R\}$)，2 的序贯理性没有满足；合理的均衡应该是 (L, ℓ)

信念系统的确定

- 给定一个策略组 σ，如果到达一个信息集 I 的概率是正的，那么对这个信息集信念 (概率分布) 可以通过 Bayes 法则来计算：

$$\mu(h) = \frac{\Pr(h|\sigma)}{\sum_{h' \in I} \Pr(h'|\sigma)}$$

其中 $\sum_{h'} \Pr(h'|\sigma) > 0$

  - 当 μ, σ 满足上述条件时，称 μ 为弱一致信念系统 (Myerson, 1991, p.166)

- 问题：如果给定的策略组 σ 下到达某个信息集的概率是 0，如何确定该信息集的信念系统？
  - 若策略 σ 下达到 I 的概率为 0，则称其处于策略路径外 (off the path)
- Kreps and Wilson (1982) 的解决方案：信念系统要满足一致性 (consistency)

一致评估与序贯均衡

二元组合 (μ, σ) 称为一个评估 (assessment)

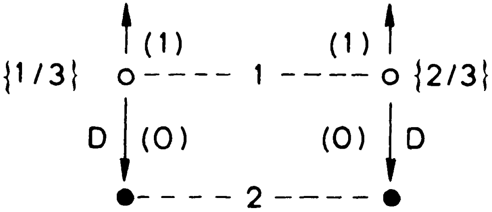
- 称 σ 为一个完全混合 (totally mixed) 策略组，如果每个参与者在每个信息集选择每个备选行动的概率都是正的；完全混合策略组通过 Bayes 法则确定了一个明确的信念系统
- (μ, σ) 称为一致 (consistent) 评估，如果存在完全混合策略的序列 σ^n，及其确定的信念系统序列 μ^n，使得

$$\lim_{n \to \infty} (\mu^n, \sigma^n) = (\mu, \sigma)$$

序贯均衡 (sequential equilibrium)

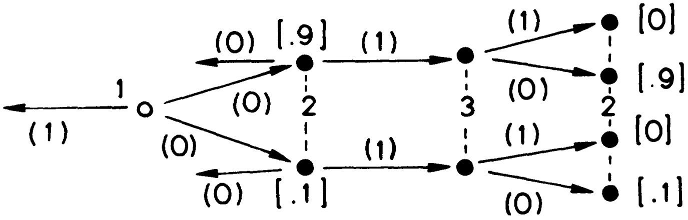
- 称 (μ, σ) 为一个序贯均衡，如果该评估是一致的并且满足序贯理性

一致性对信念系统的限制：例 1



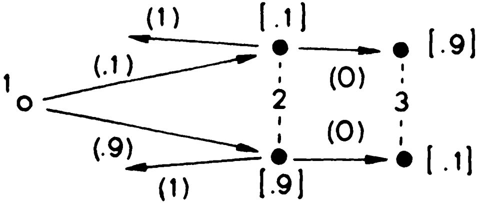
信念系统在 2 的信息集必须保证 $\mu(\text{left}) = 1/3$

一致性对信念系统的限制：例 2



信念系统在 2 的最后一个信息集不满足一致性；给定 3 的策略，2 在其两个后续信息集上的信念应该保持一致

一致性对信念系统的限制：例 3



信念系统在 3 的信息集不满足一致性；3 的信念需要与 1 的策略相一致

完美贝叶斯均衡的概念

- 不完全信息扩展博弈中，最常见的均衡概念为完美贝叶斯均衡 (perfect Bayesian equilibrium, PBE)
    - 该概念源于 Selten (1975) 定义的完美均衡 (perfect equilibrium, PE)，即均衡策略应该关于对手方均衡策略出现微小的随机偏离依然具有稳健的最优性，PE 又称为颤抖手均衡 (trembling-hand equilibrium)
    - PBE 深入、系统的正式定义由 Fudenberg and Tirole (1991) 提出，该文建立在Kreps and Wilson (1982) 关于信念系统重要性的讨论之上
- PBE 有多个版本，最弱的版本，只要求信念系统满足弱一致性 (前文 p.20)，即可以任意设定策略路径外 (到达概率为 0) 信息集 I 的信念系统 $\mu(h|I), \forall h \in I$
- Fudenberg and Tirole (1991) 增加了对路径外信念的限制条件，并说明绝大多数情况下 PBE 与序贯均衡等价，但在一定条件下，两者有差异

PBE 对信念系统的限制

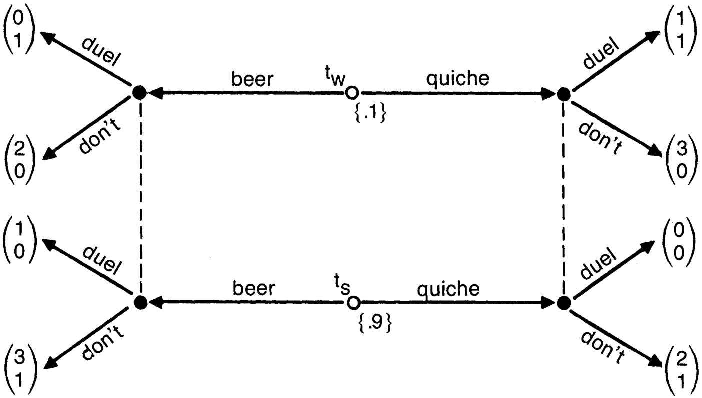
- FT 在一个类型独立的不完全信息多阶段博弈框架内，对 PBE 进行了正式定义：给定 j 期之前参与者行动历史 h^{j-1} 为公开信息，PBE 的信念系统需满足如下“合理”(reasonable) 条件
  1. 若 i 在策略 σ 下，到达 j 期信息集的概率为正，则使用 Bayes 法则更新关于 i 的类型 t_i 的后验概率 $\mu(t_i|h^{j-1}, a)$
  2. 每一期 j，关于所有参与者类型 t_i 的后验概率相互独立 $\mu(t|h^{j-1}) = \mu(t_1|h^{j-1}) \cdots \mu(t_I|h^{j-1})$
  3. 关于 t_i 的后验概率仅与 i 在 j 期的行动 a_i 有关 $\mu(t_i|h^{j-1}, a) = \mu(t_i|h^{j-1}, a_i)$
- 上述条件 (2)-(3) 合称为“行动信号不含你不知道的信息”(no-signaling-what-you-don't-know) 条件
- FT 证明了，当每个参与者仅有两个类型或者博弈只有两期时，上述 PBE 与序贯均衡等价；其他情况下，两者会有细微差异

Cho and Kreps (1987) 的例子：基本设定

两人早点铺决斗博弈

- 有两个参与者 A 和 B
- A 可能属于两种类型 (type) 中的一种：软弱 (wimpish) 或好斗 (surly)；自然 (nature) 在博弈一开始随机决定 A 的类型，$\Pr(t_s) = 0.9$
- 博弈开始时 A 就知道自己到底是哪一类；A 需要选择吃蛋饼 (quiche) 还是喝啤酒 (beer)
- A 吃完早饭就碰上 B；B 能观察到 A 早餐吃了什么，但不知道 A 是什么类型，只知道类型的分布
- B 选择要不要和 A 决斗；博弈结束

对应的博弈树



2×1 向量里的第一个份量表示 A 的收益；这个博弈可以看做是一个不完美信息博弈

进一步的解释

- A 从不同早点得到的收益取决于他的类型：如果 A 是软弱型，那他偏好蛋饼 (1 单位收益增量)；若否，则偏好啤酒 (1 单位收益增量)
- A 的收益还取决于 B 是否选择决斗：不决斗会给 A 带来 2 单位的收益增量
- B 决斗的收益取决于 A 的类型：只有当 A 是软弱型时，B 才会偏好决斗
- 此例中，A 的收益取决于其类型，故该博弈为一个不完全信息博弈
- 注意，我们总假设关于博弈的结构信息，包括参与者的类型及分布，是共同知识

两类序贯均衡

- 第一类：t_w, t_s 都选择啤酒，B 选择不决斗；如果 A 选择了蛋饼，那么 B 认为 A 是 t_w 的概率 (后验信念，posterior belief) $\mu_w \geq 0.5$，并以超过 50% 的概率选择决斗
  - 蛋饼被看作软弱型的信号 (signal)；这样的博弈也称为信号博弈 (signaling game)
- 第二类：t_w, t_s 都选择蛋饼，B 选择不决斗；如果 A 选择了啤酒，那么 B 认为 A 是 t_w 的概率 (后验信念，posterior belief) $\mu_w \geq 0.5$，超过 50% 的概率选择决斗
- 两类均衡的策略都可以包括混合策略，但均衡结果 (equilibrium outcome) 都是确定的；两类均衡也都涉及均衡外信念 (out-of-equilibrium belief)
- 这类博弈均衡的多重性跟均衡外信念紧密联系

第二类均衡的问题

- 第二类均衡中 B 的均衡外信念不是非常“合理”
- 在这类“蛋饼”均衡中，软弱型的 A 的均衡收益为 3；但如果这类 A 选择了啤酒做早餐，那么他最多可以得到的收益只有 2
- 而好斗型的 A 有可能通过选择啤酒做早餐得到更高的收益 3，若此时 B 也选择不决斗
- 因此，如果 B 看到 A 的变卦 (defect：从蛋饼到啤酒)，那么 B 应该排除是 t_w 型的可能，即 $\mu_s = 1$，如此，B 不会选择决斗；但如果好斗型的 A 意识到这个逻辑的话，那么 t_s 不应该选择蛋饼，而是啤酒

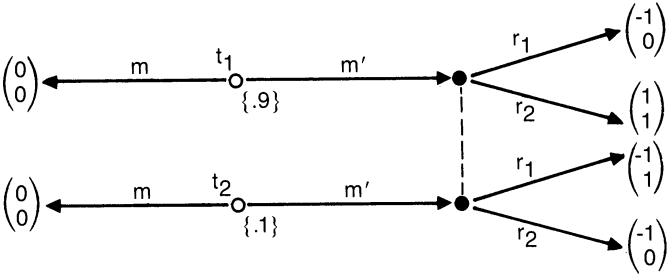
回到第一类均衡

- 可以对“啤酒”均衡进行同样的论证
- 好斗型的 A 是不会变卦的，只有软弱型的 A 可能变卦；但如此一来，B 会知道变卦吃蛋饼的肯定是 t_w，所以一定选择决斗
- 软弱型预见到 B 的反应后会发现变卦是无益的
- 这不但没有排除“啤酒”均衡而且还增强了

精炼模式

- 早餐决斗博弈中，我们论述了备选均衡中哪些是“不合理”的，而选择出“合理”的均衡，作为博弈结果的预测
- 这样的选择过程称为均衡的精炼 (equilibrium refinement)，使用的论证模式称为精炼模式 (refinement scheme)
- 同时可以见到，对序贯均衡的精炼主要是对均衡外信念的精炼：不“合理”的均衡实质是不“合理”的均衡外信念
- 文献中有很多种精炼模式，我们举例说明两种最常用模式：占优准则 (dominance criterion) 和均衡占优准则 (equilibrium dominance criterion)；后者更常称为直观准则 (intuitive criterion)

占优准则的例子



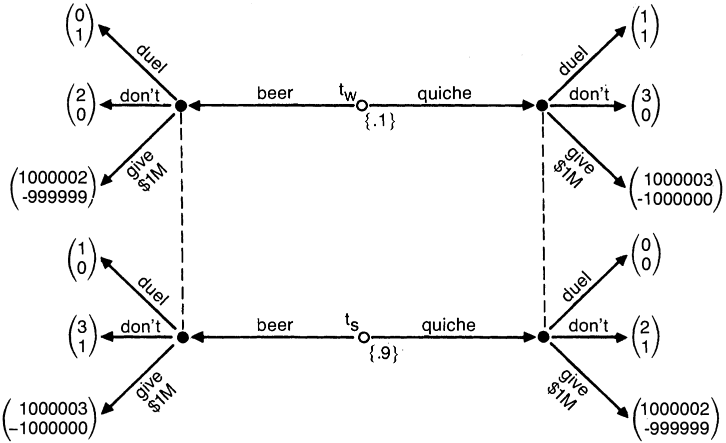
备选均衡：A 选择 m，若 A 选 m' 则 B 以超过 0.5 的概率选 r_1 且信念 $\mu(t_2) \geq 0.5$；

占优准则可以排除这样的均衡外信念：m' 是 t_2 的被占优 (dominated) 策略

均衡占优

- 早餐决斗中“蛋饼”均衡的排除就是直观准则的应用
- 特别地，给定一个均衡：(i) 我们通过对比某个类型的信息发送者 (sender) 的均衡收益和其变封后能够得到的收益，来确定均衡外信念的形式；(ii) 在此基础上，如果有别的类型的发送者会选择偏离均衡策略的话，那么称这个均衡无法通过直观准则
- 在 (i) 中确定变封后发送者的收益时需要考虑到信息接收者 (receiver) 也有自己的最优反应 (best response)：排除接受者选择被占优 (dominated) 策略的可能

均衡占优的例子：接收者的反应



排除 B 的被占优选择“给 A 100 万”，就可以使用直观准则

参考文献 I

AUMANN, R. J. (1976): "Agreeing to Disagree," *Annals of Statistics*, 4, 1236–1239.

CHO, I.-K. AND D. M. KREPS (1987): "Signaling Games and Stable Equilibria," *Quarterly Journal of Economics*, 102, 179–221.

FUDENBERG, D. AND J. TIROLE (1991): "Perfect Bayesian Equilibrium and Sequential Equilibrium," *Journal of Economic Theory*, 53, 236–260.

HARSANYI, J. C. (1967): "Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players: Part I. The Basic Model," *Management Science*, 14, 159–182.

——— (1968a): "Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players: Part II. Bayesian Equilibrium Points," *Management Science*, 14, 320–334.

——— (1968b): "Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players, Part III. The Basic Probability Distribution of the Game," *Management Science*, 14, 486–502.

KREPS, D. M. AND R. WILSON (1982): "Sequential Equilibria," *Econometrica*, 50, 863–894.

MYERSON, R. (1991): *Game Theory: Analysis of Conflict*, Cambridge, MA: Harvard University Press.

SELTEN, R. (1975): "Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games," *International Journal of Game Theory*, 4, 25–55.