高级微观经济学

第 2 讲：经典一般均衡理论

授课人：刘岩

武汉大学经管学院金融系

2024 年 9 月 23 日

本讲内容

1. 基本框架
2. 均衡概念
3. 交换经济 Edgeworth box
4. 均衡存在性
5. 均衡的福利性质

本节内容

1. 基本框架
2. 均衡概念
3. 交换经济 Edgeworth box
4. 均衡存在性
5. 均衡的福利性质

经典一般均衡模型的基本市场结构

- 给定商品集合 $\mathcal{K}=\{1,\ldots,K\}$
- 一个中央市场 (centralized market)，分为 K 个分市场
- 市场参与者（家庭或企业）只在中央市场进行买卖交易
- 所有 K 个分市场同时开启，每个市场 k 公布一个价格 p_k
- 参与者获知价格系统 $p=(p_1,\ldots,p_K)$，并各自决定对每个商品的需求与供给
- 所有交易决策汇总到形成总需求/供给；然后市场关闭
- 每个参与者只关心价格；无视其他参与者
- 竞争性体现在市场参与者均在给定价格下决策，而非厂商利润为 0

若干注记

- 经典一般均衡模型也称为 Arrow-Debreu-McKenzie 模型
  - Arrow and Debreu (1954) “Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy” Econometrica.
  - McKenzie (1959) “On the Existence of General Equilibrium for a Competitive Market” Econometrica.
  - 但两篇文章同样在 1953 年的 Econometric Society 冬季会议上宣讲了
- ADM 模型竞争性均衡相关理论统称为经典一般均衡理论
- Debreu (1959) **Theory of Value** 是经典参考文献
- Debreu (1982) **Handbook of Mathematical Economics** 的相关章节包括经典一般均衡理论后续发展的很多结果

本节内容

1 基本框架

2 均衡概念

3 交换经济 Edgeworth box

4 均衡存在性

5 均衡的福利性质

交换经济 (exchange economy)

给定家庭集合 $H = \{1, \ldots, H\}$，及每个家庭对应的效用函数 $U^h : X = \mathbb{R}^K_+ \to \mathbb{R}$ 与禀赋 $e^h \in X$

定义 1 (交换经济的竞争均衡)

给定一个交换经济 $\mathcal{E} = (e^h, U^h)_{h\in H}$，价格系统 $p \in \Delta$ 与商品配置 $(x^h)_{h\in H}$ 的组合 $\langle p, (x^h)_{h\in H}\rangle$ 构成一个竞争均衡 (competitive equilibrium, C.E.)，若下列条件得到满足：

1. 对每个家庭 $h \in H$，有 $x^h \in \operatorname{argmax}_{z\in B^h(p)} U^h(z)$，其中 $B^h(p) = \{z \in X : p \cdot z \le p \cdot e^h\}$
2. 市场出清 $\sum_{h\in H}(x^h - e^h) = 0$

生产经济的描述 (production economy)

企业

- 给定企业集合 $J = \{1, \ldots, J\}$，及每个企业的生产集合 $Y^j \subset \mathbb{R}^K$

家庭

- 给定家庭集合 $H = \{1, \ldots, H\}$，及每个家庭对应的效用函数 $U^h : X = \mathbb{R}^K_+ \to \mathbb{R}$，禀赋 $e^h \in X$，与所持有的 J 个企业的权益份额 $\theta^h = (\theta^h_1, \ldots, \theta^h_J)$
- $(\theta^h)_{h \in H}$ 对所有 $j \in J$ 满足 $\sum_h \theta^h_j = 1$

生产经济的均衡概念

定义 2 (生产经济的竞争均衡)

给定一个生产经济 $\mathcal{E} = \big((U^h, e^h, \theta^h)_{h\in H}, (Y^j)_{j\in J}\big)$，价格系统与商品配置（包括一组生产计划）的组合 $\langle p, (x^h)_{h\in H}, (y^j)_{j\in J}\rangle$ 构成一个竞争均衡，若下列条件得到满足：

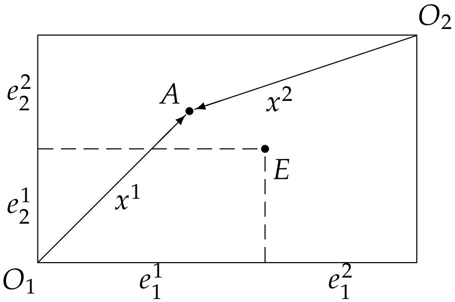
1. 对每个企业 $j \in J$ 有 $y^j \in \operatorname{argmax}_{z\in Y^j} p\cdot z$
2. 对每个家庭 $h \in H$ 有 $x^h \in \operatorname{argmax}_{z\in B^h(p,(y^j)_j)} U^h(z)$，其中
   $B^h(p,(y^j)_j) = \left\{z \in X : p\cdot z \le p\cdot e^h + \sum_{j\in J}\theta^h_j p\cdot y^j\right\}$
3. 市场出清 $\sum_{h\in H}(x^h - e^h) - \sum_{j\in J} y^j = 0$

本节内容

1. 基本框架
2. 均衡概念
3. 交换经济 Edgeworth box
4. 均衡存在性
5. 均衡的福利性质

Edgeworth box：基本表示

两个家庭，两个商品，横轴长度为商品 1 总禀赋，纵轴高度为商品 2 总禀赋，$E = \{e^1, e^2\}$ 表示两个家庭的禀赋向量，盒中任何一点 (如 A) 都是一个可行配置 (feasible allocation)

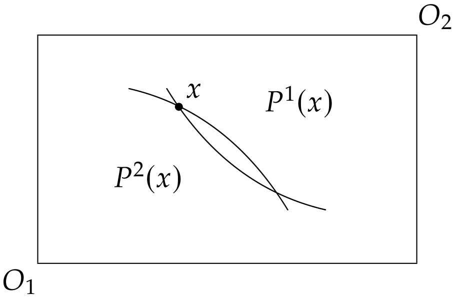


偏好商品集合与互利交易空间

对家庭 h 及给定的消费组合 $x \in X$，定义偏好商品集合为

$$P^h(x) = \{y \in T | u^h(y) \geq u^h(x)\}$$

若 $P^1(x) \cap P^2(x) \neq \emptyset$，则存在互利 (mutually benefitial) 交易空间，即可通过交易实现 Pareto 改进

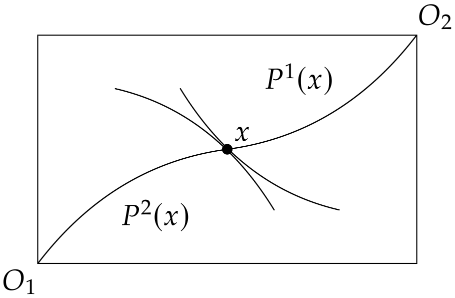


合约曲线

若 $P^1(x) \cap P^2(x) = x$，即 1 和 2 的无差异曲线相切，则 x 是一个 Pareto 最优配置，此时不存在可行配置 y，让一方不受损的情况下另一方效用严格提高

Edgeworth box 中，所有 Pareto 配置的连线，称为合约曲线 (contractual curve)

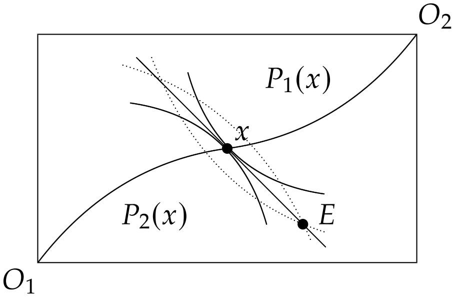
- 两个家庭偏好均严格凸时，所有 Pareto 配置确实连成一条曲线



Edgeworth box 均衡示例

均衡条件：配置 x 与禀赋 E 的连线 (斜率反映相对价格) 与 $P^1(x), P^2(x)$ 均相切于 x

这同时说明，竞争性均衡配置是一个 Pareto 最优配置



本节内容

1 基本框架

2 均衡概念

3 交换经济 Edgeworth box

4 均衡存在性

5 均衡的福利性质

均衡存在性：Arrow-Debreu 方法概要

- Arrow and Debreu (1954) 的经典证明是把均衡模型转化为一个广义博弈 (generalized game)
- 类似于 Nash (1950) 对 Nash 均衡存在性的证明，先证明该广义博弈有一个 Nash 均衡 $\langle p^*, \text{配置}^* \rangle$
- 再证明这个 Nash 均衡是一个竞争均衡；特别地，配置* 满足市场出清条件
- McKenzie 的证明方法不同，是直接考虑加总净需求 $Z(p) = \sum_h (D^h(p) - e^h)$

广义博弈

概念

- 给定参与者集合 $N = \{1, \ldots, N\}$
- 给定每个参与者 $n \in N$ 的初始策略集 S^n；S^n 是欧式空间的一个紧致凸子集
- 定义 $S = S^1 \times \cdots \times S^N$，并定义每个参与者 n 的收益函数 $\pi^n : S \to \mathbb{R}$
- 定义参与者 n 的策略限制对应 $\varphi^n : S \rightrightarrows S^n$
- 称组合 $\widetilde{\Gamma} = (S^n, \pi^n, \varphi^n)_{n \in N}$ 为一个广义博弈

注：若 $\varphi^n(s) \equiv S^n$，即没有策略限制，则 $\widetilde{\Gamma}$ 就是一个博弈

广义博弈的 Nash 均衡

最优回应对应

- 给定一个策略组 (strategy profile) $s = (s^1, \ldots, s^N)$
- 参与者 n 的单方偏离 (unilateral deviation) 定义为 $s|_n t = (s^1, \ldots, t, \ldots, s^N)$
- 参与者 n 在 s 处的最优回应集 (best reply set) 定义为
  $\beta^n(s) = \operatorname{argmax}_{t \in \varphi^n(s)} \pi^n(s|_n t)$
- $\widetilde{\Gamma}$ 的最优回应对应 (best reply correspondence) 定义为 $\beta = \beta^1 \times \cdots \times \beta^N : S \rightrightarrows S$

定义 3 (广义博弈的 Nash 均衡)

若策略组 s 满足 $s \in \beta(s)$，则称其为 $\widetilde{\Gamma}$ 的一个 Nash 均衡 (Nash equilibrium, N.E.)

Nash 均衡的存在性

定理 1

给定 $\widetilde{\Gamma}$，若对所有 $n \in N$，π^n 关于 s 连续，关于 s^n 拟凹，并且 φ^n 是连续、紧致且凸取值的对应，则 Nash 均衡存在

证明.

由 π^n 关于 s^n 拟凹且 φ^n 凸取值，知 β^n 取值为凸集；给定 φ^n 连续且紧致，由 Berge 最大值定理知 β^n 上半连续且紧致；可验证 $\beta = \beta^1 \times \cdots \times \beta^N : S \rightrightarrows S$ 也是上半连续、紧致且凸的，故由 Kakutani 不动点定理知存在 $s \in S$ 满足 $s \in \beta(s)$ □

交换经济中竞争均衡的存在性

定理 2

给定交换经济 $\mathcal{E} = (U^h, e^h)_{h\in H}$，若下列条件得到满足：

1. 对任意 $h \in H$，$e^h \gg 0$
2. 对任意 $h \in H$，U^h 连续、拟凹且单调
3. 对任意商品 $k \in K$，存在 $h \in H$，使得每当 $x \geq y$ 且 $x_k > y_k$ 时 $U^h(x) > U^h(y)$ 成立

则存在一个竞争均衡

均衡存在性的证明：定义一个广义博弈

- 选取 $m > \max_k \sum_h e_k^h$，定义 $M = \{x \in X : x_k \leq m\}$
- 给定 H 个家庭参与者，外加一个特别的价格参与者
- 定义策略空间 $S = \Delta \times M \times \cdots \times M$
- 定义家庭参与者 $h \in H$ 的收益函数 $\pi^h : S \to \mathbb{R}$ 为

$$\pi^h(p, x^1, \ldots, x^h, \ldots, x^H) = U^h(x^h)$$

- 定义价格参与者的收益函数 $\pi^0 : S \to \mathbb{R}$ 为

$$\pi^0(p, x^1, \ldots, x^H) = p \cdot \sum_h (x^h - e^h)$$

- 定义参与者的策略限制对应为

$$\varphi^h(p, x^1, \ldots, x^H) = B^h(p) \cap M, \quad \varphi^0 \equiv \Delta$$

均衡存在性的证明：广义博弈的 Nash 均衡

- 验证上述定义的广义博弈满足定理 1 的条件
- 其中最重要的一步是证明 $\varphi^h(p,(x^h_h)) = B^h(p) \cap M$ 的连续性，这里要用到 $e^h \gg 0$ 这个假设
- 定理 1 保证存在一个 Nash 均衡 $\langle p,(x^h)_h \rangle$
- 余下步骤就是验证 $\langle p,(x^h)_h \rangle$ 是一个竞争均衡

均衡存在性的证明：验证 Nash 均衡是竞争均衡

1. 验证 $\sum_h x^h \leq \sum_h e^h$
2. 验证对于任意 $h \in H$，x^h 在 $B^h(p)$ 上最大化 U^h，而不仅仅在 $B^h(p) \cap M$ 上如此
3. 验证 $p \gg 0$
4. 验证 $p \cdot x^h = p \cdot e^h$ 对任意 $h \in H$ 成立
5. 验证 $\sum_h x^h = \sum_h e^h$

注 $e^h \gg 0$ 对所有 $h \in H$ 成立是一个非常强的要求；这个条件可以弱化；详见 Dubey and Liu (2017, sec. 3.2)

验证第 1 步：满足资源约束

由 $p \cdot x^h \leq p \cdot e^h \ \forall h$ 可知，

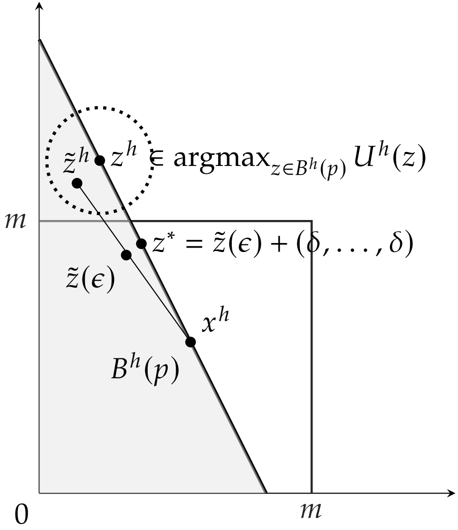
$$p \cdot \left(\sum_h x^h - \sum_h e^h \right) \leq 0$$

若 $\exists \ell$ 使得 $\sum_h x_\ell^h - \sum_h e_\ell^h > 0$，则可选取

$$\tilde{p} = 1_\ell \equiv (0, \ldots, 0, \underset{\ell \text{th}}{1}, 0, \ldots, 0) \in \Delta$$

此时显然有 $\tilde{p} \cdot \left(\sum_h x^h - \sum_h e^h \right) > 0$，则 $\tilde{p}$ 是价格参与者的一个单方偏离，说明 $\langle p, (x^h)_h \rangle$ 不是 N.E.；这一矛盾说明 $\sum_h x^h - \sum_h e^h \leq 0$

验证第 2 步：x^h 在 $B^h(p)$ 而不仅是 $B^h(p)\cap M$ 上最大化 U^h



反证法：假设有 $z^h \in B^h(p)\setminus M$ 使得 $U^h(z^h) > U^h(x^h)$，则可找到其领域内 $\tilde{z}^h \in B^h(p)$ 且 $U^h(\tilde{z}^h) > U^h(x^h)$，进而由偏好的凸性知 $\exists\varepsilon \in (0,1)$ 使得 $\tilde{z}(\epsilon) = \epsilon\tilde{z}^h + (1-\epsilon)x^h \in B^h(p)\cap M$ 内部且 $U^h(\tilde{z}(\epsilon)) \geq U^h(x^h)$，最后由 $\tilde{z}(\epsilon)$ 在 $B^h(p)$ 的内部可知 $\exists\delta > 0$ 使得 $z^* = \tilde{z}(\epsilon)+(\delta,\dots,\delta) \in B^h(p)\cap M$，而由偏好的单调性知 $U^h(z^*) > U^h(\tilde{z}(\epsilon)) \geq U^h(x^h)$，与 x^h 在 $B^h(p)\cap M$ 的最优性矛盾

验证第 3–5 步：$p \gg 0$，预算约束取等号，市场出清

第 3 步：假设 $p_\ell = 0$，则由定理假设存在 h 严格偏好更多的 ℓ，则 $x^h + 1_\ell \in B^h(p)$ 构成一个单方面偏离

第 4 步：假设 $p \cdot x^h < p \cdot e^h$，则存在 $\delta > 0$ 使得 $x^h + (\delta, \ldots, \delta) \in B^h(p)$，由偏好单调性知该消费组合构成 h 的一个单方面偏离

第 5 步：由第 1 步知 $\sum_h x^h - \sum_h e^h \leq 0$，假设对 ℓ 有 $\sum_h x_\ell^h - \sum_h e_\ell^h < 0$，但注意到 $p \gg 0$，故

$$p \cdot \left(\sum_k x^h - \sum_h e^h\right) = \cdots + p_\ell \left(\sum_h x_\ell^h - \sum_h e_\ell^h\right) + \cdots < 0$$

与第 4 步矛盾

生产经济中一般均衡的存在性

定理 3

给定生产经济 $\mathcal{E} = \big((U^h, e^h, \theta^h)_{h\in H}, (Y^j)_{j\in J}\big)$，保持定理 2 的条件不变，并假设 $(Y^j)_{j\in J}$ 满足如下条件：

1. 对任意 $j \in J$，$Y^j \cap \mathbb{R}^K_+ = \{0\}$
2. 对任意 $j \in J$，Y^j 是闭凸集
3. 对任意 $j \in J$，$Y^j + \mathbb{R}^K_- \subset Y^j$
4. 令 $Y = Y^1 + \cdots + Y^J$，$Y \cap \mathbb{R}^K_+ = \{0\}$
5. $Y \cap (-Y) = \{0\}$

则存在一个竞争均衡

本节内容

1. 基本框架
2. 均衡概念
3. 交换经济 Edgeworth box
4. 均衡存在性
5. 均衡的福利性质

Pareto 最优配置

给定交换经济 $\mathcal{E} = (U^h, e^h)_{h\in H}$

- 称配置 $(x^h)_h \in X^H$ 为可行的，如果 $\sum_h x^h \le \sum_h e^h$
- 给定两个可行配置 $(x^h)_h$ 和 $(y^h)_h$，称 $(x^h)_h$ Pareto 优于 $(y^h)_h$，如果对所有的 $h \in H$ 有 $U^h(x^h) \ge U^h(y^h)$，且对至少一个 h 有 $U^h(x^h) > U^h(y^h)$
- 称 $(x^h)_h$ 为一个 Pareto 最优配置，如果没有其它可行配置 Pareto 优于 $(x^h)_h$

对生产经济 $\mathcal{E} = \left((U^h, e^h, \theta^h)_{h\in H}, (Y^j)_{j\in J}\right)$ 也可以类似的定义 Pareto 最优配置

福利经济学第一定理

- 对给定的交换经济 $\mathcal{E}$，称一个配置 $(x^h)_h$ 为竞争均衡配置 (competitive equilibrium allocation)，若存在 $p \in \Delta$ 使得 $\langle p, (x^h)_h \rangle$ 是 $\mathcal{E}$ 的一个竞争均衡
- 对生产经济也可类似定义

定理 4 (福利经济学第一定理)

假设家庭偏好均具有单调性，则竞争均衡配置是 Pareto 最优配置

福利经济学第一定理的注记与证明梗概

- 偏好的单调性可以放松为局部非饱和性 (local nonsatiability)，其作用在于说明若 $\bar{x}^h \succsim x^h$ 则 $p \cdot \bar{x}^h \geq p \cdot x^h$，以及若 $\bar{x}^h \succ x^h$ 则 $p \cdot \bar{x}^h > p \cdot x^h$
- 上述偏好的性质又称为显示偏好原理 (revealed preference principle)

交换经济证明梗概.

反证法。假设存在一个可行配置 $(\bar{x}^h)_h$ Pareto 优于竞争均衡配置 $(x^h)_h$，则在均衡价格向量 p 下，对所有 h 有 $p \cdot x^h \leq p \cdot \bar{x}^h$，并对某个 h 有 $p \cdot x^h < p \cdot \bar{x}^h$。对 h 求和知 $p \cdot \sum_h x^h < p \cdot \sum_h \bar{x}^h$。由可行配置定义知 $\sum_h \bar{x}^h \leq \sum_h e^h$，故 $p \cdot \sum_h x^h < p \cdot \sum_h e^h$，与竞争均衡市场出清条件 $\sum_h x^h = \sum_h e^h$ 矛盾。 □

福利经济学第二定理

定理 5 (福利经济学第二定理)

假设家庭偏好与生产集合均满足凸性，则对任一 Pareto 最优配置，均可找到一个价格向量，使得该配置与价格向量的组合构成一个竞争性均衡

注 1 偏好的凸性是一个技术性条件，为了便于对商品配置空间中两个不相交的凸集，找出一个分割超平面，进而改造价格向量

注 2 该定理的本质涵义在于竞争性市场 Pareto 效率的完全性：任何计划能够实现的有效配置，通过市场也能实现

参考文献 I

ARROW, K. J. AND G. DEBREU (1954): "Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy," *Econometrica*, 22, 265–290.

DEBREU, G. (1959): *Theory of Value*, New York: John Wiley and Sons.

——— (1982): "Existence of competitive equilibrium," in *Handbook of Mathematical Economics*, ed. by K. J. Arrow and M. D. Intriligator, Amsterdam: Elsevier, vol. 2, chap. Debreu-1982, 697–743.

DUBEY, P. AND Y. LIU (2017): *Lecture Notes in Microeconomics: General Equilibrium*, Manuscript.

MCKENZIE, L. W. (1959): "On the Existence of General Equilibrium for a Competitive Market," *Econometrica*, 27, 54–71.

NASH, JR., J. F. (1950): "Equilibrium Points in n-Person Games," *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 36, 48–49.