4.1 理解同方差

李浩芸

2020.10.29

概念铺垫

- 如果模型$Y = \alpha + \beta X + e$及$\mathbb{E}[e|X] = 0$是正确的，则根据整体数据可得系数(α,β)的真实值，不存在方差；如果只有样本数据，那么得到的样本估计系数（$\hat{\alpha},\hat{\beta}$）是真实系数(α,β)的无偏和一致估计。
- 无偏性：通过重复抽样进行估计，样本估计值的平均值等于真实的系数值。
- 一致性：当样本数量趋近于无穷时，样本估计值几乎接近真实系数值。
- 常见四种干扰项(e)情形对样本估计方差的影响：同方差、异方差、自相关、集群相关。
- 为了便于讨论，本章假定解释变量是非随机的。

回顾$Var(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{OLS})$

- $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{OLS} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{e}$
- $\mathrm{var}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{OLS}\right) = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\mathbb{E}[\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}']\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} \qquad (4.1)$
- $\mathbb{E}(\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}') = \mathrm{var}(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{\Omega} =$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \cdots & \sigma_{2N} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & \cdots & \sigma_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \sigma_{N3} & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}$$

回顾$Var(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{OLS})$

- $\text{var}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{OLS}) =$

$$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \cdots & \sigma_{2N} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & \cdots & \sigma_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \sigma_{N3} & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$$

可见，干扰项协方差矩阵$\boldsymbol{\Omega}$的形式是决定样本估计系数方差的关键因素。

同方差

- 同方差：每个观测点干扰项的方差大小是相同的，并且干扰项是不相关的，即

$$\mathrm{var}(e_i) \equiv \sigma_i^2 = \sigma^2$$

$$\text{对于任意} i \neq j, \text{均有} \mathrm{cov}(e_i, e_j) \equiv \sigma_{ij}^2 = 0$$

- 同方差形成原因：每个观测点的干扰项是从独立且相同的分布中产生的。（这是一个很强的假设）
- 同方差矩阵可表示为

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}') = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \sigma^2 \boldsymbol{I}$$

同方差

- 为得到估计系数协方差矩阵$\mathrm{var}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{homo}^{OLS}\right)$，将干扰项协方差矩阵$\boldsymbol{\Omega}$代入（4.1）式，可得：

$$\mathrm{var}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{homo}^{OLS}\right)$$

$$= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}'\begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}$$

$$= \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}} = \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}$$

同方差

- 在实际运用中干扰项方差σ^2是未知的，需利用样本残差$\hat{e}$去估计σ^2。
- $s^2=\frac{\hat{e}'\hat{e}}{N-K}=\frac{1}{N-K}\sum_{i=1}^{N}\hat{e}_i^2$是$\sigma^2$的无偏和一致估计（N为样本数，K为解释变量数）。
- 同方差情况下OLS系数估计值方差的估计量为：

$$\widehat{\mathrm{var}}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{homo}^{OLS}\right)=\frac{\hat{\boldsymbol{e}}'\hat{\boldsymbol{e}}}{N-K}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$$

- 系数标准误差的估计量为：

$$Std.Err.\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{homo}^{OLS}\right)=\sqrt{\widehat{\mathrm{var}}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{homo}^{OLS}\right)}=\sqrt{\frac{\hat{\boldsymbol{e}}'\hat{\boldsymbol{e}}}{N-K}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}}$$

处理异方差和自相关问题的方法

- 实践中，通常用以下两种方法处理异方差与自相关问题：
  - 1.先将模型进行转换，使得干扰项满足同方差，再用OLS进行回归。（广义最小二乘估计法）
    - 优点：得到的线性关系系数是最小的，即系数估计是最有效的。
    - 缺点：模型转换需要预知或估计干扰项的协方差矩阵形式，在实际运用中通常不可行或十分复杂。
  - 2.不转换模型，直接使用OLS在原模型中估计系数，并计算出异方差和自相关条件下OLS估计系数的方差。（异方差和自相关只是造成OLS的估计不再等于$\mathrm{var}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{homo}^{OLS}\right) = \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$，但仍满足$\mathbb{E}[e \mid X] = 0$，故不影响无偏性和一致性）
    - 优点：处理简单不需转换模型，只需找到在异方差和自相关情况下正确的OLS系数估计方差即可。
    - 缺点：OLS系数估计量标准误差大于GLS系数估计量标准误差。

4.2理解异方差

定义

- 异方差是指每个观测点的干扰项方差是不相等的，$\mathrm{var}(e_i)=\sigma_i^2$，但不同观测点的干扰项不相关，即对任意$i\neq j$，均有$\mathrm{cov}(e_i,e_j)=0$
- 异方差意味着每个观测点的干扰项是从独立但不相同的分布中产生的。
- 异方差情况下，干扰项的方差矩阵：

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{ee}')=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3^2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_N^2\end{bmatrix}=\sigma^2\begin{bmatrix}w_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & w_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & w_3 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & w_N\end{bmatrix}$$

$$=\sigma^2\boldsymbol{\Omega}_{heter}$$

处理方法

- （一）使用OLS估计并计算稳健标准误差
  - 在异方差的情况下如果还是使用OLS估计原方差的系数，该系数估计值为

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{heter}^{OLS}=\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{OLS}=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\mathrm{X}'\mathrm{Y}=\boldsymbol{\beta}+(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{e}$$

  - $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{heter}^{OLS}$仍然是无偏和一致的估计量，即

$\mathbb{E}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{heter}^{OLS}\right)=\boldsymbol{\beta}, plim\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{heter}^{OLS}=\boldsymbol{\beta}$。

但在异方差情形下，$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{heter}^{OLS}$的方差为：

$$\mathrm{var}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{heter}^{OLS}\right)=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\mathbb{E}[\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}']\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$$

将异方差矩阵代入，可得

$$\mathrm{var}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{heter}^{OLS}\right)=\sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}_{heter}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$$

处理方法

- 则有$\mathrm{var}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{heter}^{OLS}\right) \neq \mathrm{var}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right)_{homo}^{OLS} = \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$
- 问题：每一个观测点的干扰项e_i都有自己的方差σ_i^2，但样本的每个观测点只能得到一个残差值。
- White提出了用将每个干扰协方差矩阵中的方差σ_i^2用对应样本残差平方$\hat{e}_i^2$代替即可：

$$\widehat{\mathrm{var}}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{heter}^{OLS}\right) = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\begin{bmatrix} \hat{e}_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{e}_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \hat{e}_3^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \hat{e}_N^2 \end{bmatrix}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$$

将$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{X_1}\ \ \boldsymbol{X_2}\ \ \boldsymbol{X_3} \cdots\ \ \boldsymbol{X}_N]'$代入

可得$\widehat{\mathrm{var}}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{heter}^{OLS}\right) = \left(\sum_i^N \boldsymbol{X_i}\boldsymbol{X_i}'\right)^{-1}\left[\sum_i^N \hat{e}_i^2\boldsymbol{X_i}\boldsymbol{X_i}'\right]\left(\sum_i^N \boldsymbol{X_i}\boldsymbol{X_i}'\right)^{-1}$,此估计量为一致估计量。

处理方法

- $\widehat{\text{var}}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{heter}^{OLS}\right) = \left(\sum_i^N \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{i}}{}'\right)^{-1}\left[\sum_i^N \hat{e}_i^2 \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{i}}{}'\right]\left(\sum_i^N \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{i}}'\right)^{-1}$为异方差情况下著名的White或Eicker-Huber-White的OLS系数方差的估计量。这一估计不需要任何有关异方差结构形式的假设。（White稳健估计值）

- 注意：$\widehat{\text{var}}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{heter}^{OLS}\right)$是$\text{var}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{heter}^{OLS}\right)$的一致估计量，但$\widehat{\text{var}}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{heter}^{OLS}\right)$不是一个无偏估计量，因此用White标准误进行小样本t检验或F检验无效。

处理方法

- （二）广义最小二乘法（GLS）
  - 假设模型为

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + e_i，\ i = 1,\cdots,N$$

  - 如果干扰项e_i的方差互不相关但与X_i相关，那么可假设其关系可表示成

$$e_i = w(X_i)v_i$$

  - 其中，$w(X_i)$是一个关于X_i的函数，v_i满足同方差假设：$\mathbb{E}(v_i) = 0, \mathbb{E}\left(v_i^2\right) = 1, \mathbb{E}\left(v_i v_j\right) = 0, i \neq j$

$$\text{var}\,(e_i) = w^2(X_i), \text{cov}\left(e_i, e_j\right) = \text{cov}\left[w(X_i)v_i, w\left(X_j\right)v_j\right] = 0, i \neq j$$

  - 模型可写为

$$\frac{Y_i}{w(X_i)} = \frac{\alpha}{w(X_i)} + \frac{\beta X_i}{w(X_i)} + \frac{e_i}{w(X_i)} = \frac{\alpha}{w(X_i)} + \frac{\beta X_i}{w(X_i)} + v_i$$

$$Y_i^* = \alpha^* + \beta X_i^* + v_i$$

处理方法

- 经过转换后所得模型 $Y_i^* = \alpha^* + \beta X_i^* + v_i$ 中干扰项为同方差，则可对这个模型按OLS的方法进行估计。
- 转换本质：给X越大的观测值赋予越小的权重$\frac{1}{w(X_i)}$，原理是X越大的观测点的Y值受到干扰项的影响越大，其可信度越低，因此赋予越低的权重。
- 此外，这只是一个简单的例子，异方差函数$w(\cdot)$不一定是X的函数，也可能是其他一些可观测变量或不可观测变量的函数。
- 缺点：虽然GLS方式理论上简单，但实践中我们很难得到$\boldsymbol{\Omega}_{heter}$的结构，从而无法进行模型转换，所以GLS在实证中很少使用。

异方差Stata应用例子

- $Y=5+3X+e, X \sim N(0,5)$
- $e=w(x) \times v, v \sim N(0,5)$
- $w(X)=\sqrt{\exp(-0.5+0.2X)}$

	用OLS但忽略异方差	用OLS但考虑异方差	使用GLS
$\hat{\beta}$	2.532236	2.532236	3.006215
Std.Err.($\hat{\beta}$)	.1189547	.2337363	.0223502

4.3 理解自相关

定义

- 违背$\mathrm{cov}(e_i, e_j) = 0$，$i \neq j$这一假设会产生自相关，即不同观测点的干扰项是相关的。自相关常见于包含时间序列的数据。
- 在实证研究中，通常存在自相关的干扰项也会存在异方差，因此将二者一并考虑。
- 在异方差和自相关同时存在的情况下，干扰项的方差矩阵为

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}') = \boldsymbol{\Omega}_{\text{auto}} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \cdots & \sigma_{2N} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & \cdots & \sigma_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{41} & \sigma_{42} & \sigma_{43} & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}$$

处理方法

- （一）使用OLS估计并计算稳健标准误差
  - 存在一阶自相关，即i期和i+1期的干扰项存在相关性 $\text{cov}(e_i, e_{i+1}) = \sigma_{i,i+1}$
  - OLS系数方差为$\text{var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{auto}^{OLS}) = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}_{auto}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}} =$
    $$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}'\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}$$
  - Newey和West提出，在大样本下，一次性估计自相关情况下的OLS估计值方差$\text{var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{auto}^{OLS})$的一致估计量，这个估计量通常被称为Newey-West标准误差。

处理方法

- $\widehat{\text{var}}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{auto}^{OLS}\right) = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}_{auto}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\left[\boldsymbol{X}_1 \;\; \boldsymbol{X}_2 \;\; \boldsymbol{X}_3 \;\cdots\; \boldsymbol{X}_N\right]' \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1' \\ \boldsymbol{X}_2{}' \\ \boldsymbol{X}_3{}' \\ \cdots \\ \boldsymbol{X}_N{}' \end{bmatrix} (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$

$$= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\left[\sum_{i=1}^{N} \hat{e}_i^2 \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i' + \sum_{i=1}^{N-1} \hat{e}_i\hat{e}_{i+1}(\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_{i+1}' + \boldsymbol{X}_{i+1}\boldsymbol{X}_i{}')\right](\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$$

$$= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\left[\sum_{i=1}^{N} \hat{e}_i^2 \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i'\right](\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\left[\sum_{i=1}^{N-1} \hat{e}_i\hat{e}_{i+1}(\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_{i+1}' + \boldsymbol{X}_{i+1}\boldsymbol{X}_i{}')\right](\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$$

- 分为两部分，第一部分处理异方差，第二部分处理自相关。
- Newey-West标准误差估计量又称为异方差和自相关一致标准误差（HAC标准误差）。

处理方法

- 如果干扰项存在$H(>1)$阶自相关， Newey-West标准误差估计量的一般表达形式为：

$$\widehat{\operatorname{var}}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{Auto}^{OLS}\right)=(\boldsymbol{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{auto}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}$$

- 其中：

$$\boldsymbol{X}'\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{auto}\boldsymbol{X}=\sum_{i=1}^{N}\hat{e}_i^2\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i'+\sum_{j=1}^{H}\sum_{i=j+1}^{N}\left(1-\frac{j}{H+1}\right)\hat{e}_i\hat{e}_{i-j}(\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_{i-j}'-\boldsymbol{X}_{i-j}\boldsymbol{X}_i')$$

- 上式第一部分处理异方差，第二部分处理自相关。
- H也称滞后参数，即自相关效应只延续H时段。
- $\operatorname{cov}(e_i,e_{i-s})=0, s=H+1, H+2,\cdots$。

处理方法

- HAC加入了$\left(1-\frac{j}{H+1}\right)$，从技术上保证了HAC标准误差在样本里是正定的。直观上理解为时间距离越远（j越大）的自相关效应估计的影响越小，因此赋予更小的权重。
- 与不需要判断White标准误差不同，Newey-West标准误差必须选择滞后H。通常情况下，设定超过数据周期的滞后时间就足够了。

处理方法

- （二）广义最小二乘法（GLS）
  - 假设模型形式为$Y_t = \alpha + \beta X_t + e_t, t = 1,2,\cdots,T$
  - 干扰项e_t（假设$|\rho| < 1$)一阶自相关模型 $e_t = \rho e_{t-1} + v_t, v_t \sim \mathrm{i.i.d}\ (0, \sigma_v^2)$
  - 干扰项性质：$\mathbb{E}(e_t) = 0, \mathrm{var}(e_t) = \frac{\sigma_v^2}{1-\rho^2}, \mathrm{cov}(e_t, e_{t-k}) = \frac{\rho^k \sigma_v^2}{1-\rho^2}$
  - 转换模型：

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = (\alpha - \rho\alpha) + (X_t - \rho X_{t-1})'\beta + (e_t - \rho e_{t-1})$$

$$t = 2,3,\cdots,\mathrm{T}$$

$$Y_t^* = \alpha^* + X_t^* \beta + v_t$$

$$t = 2,3,\cdots,\mathrm{T}$$

  - 转换后的模型满足同方差，对其进行回归，可得GLS估计量$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{auto}^{GLS}$，它是最有效的线性估计值[$\mathrm{var}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{auto}^{OLS}) > \mathrm{var}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{auto}^{GLS})$]
  - 然而通常情况下自相关未知，这方法不常用。

自相关Stata实例

- $y_t = 5 + 3x_t + e_t$
- $x_t = 0.4x_{t-1} + \epsilon_t, \epsilon_t \sim N(0,5)$
- $e_t = 0.8e_{t-1} + v_t, v_t \sim N(0,5)$

	使用OLS且忽略自相关	使用OLS并考虑异方差和自相关	使用GLS
$\hat{\beta}$	2.907695	2.907695	2.906863
Std.Err.($\hat{\beta}$)	.1165501	.1366197	.066626