2017年DSGE研讨班

第三讲　DSGE建模：从基准RBC到 Smets & Wouters (2003)

侯成琪
武汉大学经济与管理学院金融系

- 从最简单的 DSGE 模型——基准 RBC 模型入手，逐步添加货币因素、名义刚性、真实摩擦，使理论模型逐步接近现实经济
- 掌握 DSGE 模型每一个组成部分——家庭、厂商、政府的设定方法，了解每一种设定的经济含义及其对模型结果的影响
- 推导每一个方程并理解其经济含义。能够理解 Smets & Wouters (2003)的每一个假设、推导每一个方程，DSGE 建模就基本入门了

1. 一个基准的 RBC 模型

- 假设经济有一个代表性家庭和一个代表性厂商组成
- 家庭理性选择消费水平、劳动供给和资本积累以实现终生效用最大化
- 厂商理性选择劳动需求和资本需求以实现利润最大化
- 假设商品市场、劳动力市场和资本市场都是完全竞争的，因此家庭和厂商都是价格接受者

1.1 理论模型

1.1.1 代表性家庭

代表性家庭理性选择消费水平、劳动供给和资本积累，以实现终生效用最大化：

$$\max E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, N_t)$$

其中 β 为折现因子，C_t 为家庭的消费水平，N_t 为家庭的劳动供给。

第 t 期家庭的支出包括三部分：

- 消费支出 C_tP_t，其中 P_t 为价格水平
- 购买单期名义无风险债券的支出 B_t
- 资本积累 K_tP_t

第t期家庭的可支配收入包括三部分：

- 工资收入$N_tW_tP_t$，其中W_t为真实工资
- 第 t-1 期购买的、在第 t 期到期的单期名义无风险债券的总收益$I_{t-1}B_{t-1}$，其中I_t为债券的名义利率
- 第 t-1 期资本的租金$K_{t-1}R_t^kP_t$以及折旧后剩余的资本$(1-\delta)K_{t-1}P_t$，其中R_t^k为资本的租金，δ为资本折旧率

代表性家庭面临的预算约束为：

$$N_t W_t P_t + I_{t-1} B_{t-1} + K_{t-1} R_t^k P_t + (1-\delta) K_{t-1} P_t = C_t P_t + B_t + K_t P_t$$

等式两边都除以 P_t，则预算约束可以表示为：

$$N_t W_t + \frac{I_{t-1} b_{t-1}}{\Pi_t} + K_{t-1} R_t^k + (1-\delta) K_{t-1} = C_t + b_t + K_t$$

其中 $b_t = B_t / P_t$ 为债券的真实持有量，$\Pi_t = P_t / P_{t-1}$ 为通货膨胀。

求解代表性家庭的优化问题的 Lagrange 函数为：

$$\mathrm{L}=E_0\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left\{U(C_t,N_t)+\lambda_t\left(N_tW_t+\frac{I_{t-1}b_{t-1}}{\Pi_t}+K_{t-1}R_t^k+(1-\delta)K_{t-1}-C_t-b_t-K_t\right)\right\}$$

其中 λ_t 为 Lagrange 乘子。

关于消费水平 C_t，劳动供给 N_t、债券真实持有量 b_t 和资本积累 K_t 的一阶条件分别为：

$$\frac{\partial L}{\partial C_t}=U_{c,t}-\lambda_t=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial N_t}=U_{n,t}+\lambda_tW_t=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial b_t}=-\lambda_t+\beta E_t\left(\lambda_{t+1}\frac{I_t}{\Pi_{t+1}}\right)=0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial b_t}=-\lambda_t+\beta E_t\left(\lambda_{t+1}\left(R_{t+1}^k+1-\delta\right)\right)=0 \tag{4}$$

由式(1)和(3)可得： $U_{c,t} = \beta E_t\left(U_{c,t+1}\frac{I_t}{\Pi_{t+1}}\right)$

由式(1)和(2)可得： $-U_{n,t} = W_t U_{c,t}$

对比式(3)和(4)可得： $E_t\left(R_{t+1}^k + 1 - \delta\right) = E_t\left(\frac{I_t}{\Pi_{t+1}}\right)$

将真实利率定义为

$$R_t = E_t\left(\frac{I_t}{\Pi_{t+1}}\right)$$

两边取对数后得到 $r_t = i_t - E_t(\pi_{t+1})$，这就是描述名义利率、真实利率和预期通货膨胀率之间关系的费雪方程式（Fisher equation）。

常用的CRRA效用函数（Constant Relative Risk Aversion Utility）：

$$U(C_t, N_t) = \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}$$

其中σ为相对风险厌恶系数，$1/\varphi$为劳动N_t的真实工资弹性。

1.1.2 完全竞争厂商

厂商向代表性家庭雇佣劳动和租赁资本来生产商品，生产函数为：

$$Y_t = f(K_{t-1}, N_t, A_t) \tag{5}$$

其中 A_t 为技术冲击，服从如下的 **AR(1)**过程：

$$\ln A_t = \rho_A \ln A_{t-1} + u_{A,t} \tag{6}$$

其中 $\rho_A \in (0,1)$ 且 $u_{A,t}$ 服从独立同分布的正态分布 $N(0, \sigma_A^2)$。

厂商面临的优化问题是选择劳动投入和资本投入以实现利润最大化，即

$$\max_{\{N_t, K_{t-1}\}} \left\{ f(K_{t-1}, N_t, A_t) - W_t N_t - R_t^k K_{t-1} \right\}$$

关于劳动投入 N_t 和资本投入 K_{t-1} 的一阶条件分别为：

$$W_t = f_n(K_{t-1}, N_t, A_t) \qquad \textbf{(7)}$$

$$R_t^k = f_k(K_{t-1}, N_t, A_t) \qquad \textbf{(8)}$$

采用的 CD 生产函数（Cobb–Douglas production function）：

$$Y_t = A_t K_{t-1}^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

1.1.3 市场出清

定义资本积累方程为：

$$K_t = (1-\delta)K_{t-1} + Inv_t \tag{9}$$

则投资水平为：

$$Inv_t = K_t - (1-\delta)K_{t-1}$$

商品市场出清条件为：

$$Y_t = C_t + Inv_t \tag{10}$$

这个基准 DSGE 模型共有 λ_t、C_t、N_t、W_t、K_t、R_t^k、R_t、A_t、Y_t **和** Inv_t **等 10 个变量，均衡性条件如下 10 个方程构成：**

$$C_t^{-\sigma} = \lambda_t \tag{11}$$

$$N_t^{\varphi} = \lambda_t W_t \tag{12}$$

$$\lambda_t = \beta E_t\left(\lambda_{t+1} R_t\right) \tag{13}$$

$$R_t = E_t\left(R_{t+1}^k + 1 - \delta\right) \tag{14}$$

$$Y_t = A_t K_{t-1}^{\alpha} N_t^{1-\alpha} \tag{15}$$

$$W_t = (1-\alpha)\tfrac{Y_t}{N_t} \tag{16}$$

$$R_t^k = \alpha \tfrac{Y_t}{K_{t-1}} \tag{17}$$

$$\ln A_t = \rho_A \ln A_{t-1} + u_{A,t} \tag{18}$$

$$Y_t = C_t + Inv_t \tag{19}$$

$$K_t = (1-\delta)K_{t-1} + Inv_t \tag{20}$$

问题：这个基准 DSGE 模型能够考察名义利率和通货膨胀吗？

1.1.4 稳态分析、对数线性化和求解

分析其他的经济模型，很少对数线性化。为什么 DSGE 模型要在稳态附近进行对数线性化？

- 动态优化问题难以求解，必须借助于数值算法；再考虑一般均衡，难度更大。
- DSGE 模型主要用于分析经济周期波动，而非长期增长，关注的是一个外生冲击如何推动经济偏离稳态（steady state）以及随着外生冲击的衰减经济如何恢复稳态。

记向量$\mathbf{x}_t$为内生变量构成的列向量，向量$\boldsymbol{\varepsilon}_t$为外生冲击构成的列向量，则模型的均衡性条件可以表示为：

$$E_t\left\{f\left(\mathbf{x}_{t+1},\mathbf{x}_t,\mathbf{x}_{t-1},\boldsymbol{\varepsilon}_t\right)\right\}=0 \tag{21}$$

利用 dynare 软件求解这个线性理性预期模型后，可以得到如下形式的最优解：

$$\mathbf{x}_t=\mathbf{G}_x\mathbf{x}_{t-1}+\mathbf{G}_{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{22}$$

这其实就是一个 VAR(1)模型，可以按照 VAR 模型的原理进行冲击-响应分析以及方差分解。

DSGE 模型的参数设定方法主要有两种，一种方法是校准（calibration），一种方法是估计，包括极大使然估计、贝叶斯估计和 GMM 估计，其中比较常用的是贝叶斯估计。

问题：稳态分析与参数校准的关系

根据相关文献的通行取法：

- **季度折现因子 β 设定为 0.99**
- **季度资本折旧率 δ 设定为 2.5%**
- **取资本收入份额 $\alpha = 1/3$；**
- **采用对数效用函数，即将相对风险厌恶系数 σ 设定为 1；**
- **假设劳动投入具有单位真实工资弹性，即 $\varphi = 1$；**
- **取技术冲击的一阶自相关系数 $\rho_A = 0.9$，标准差 $\sigma_A = 0.1$**
- **根据稳态分析的结论，可以得到 R_{ss} 、 R_{ss}^k 、 $\frac{C_{ss}}{Y_{ss}}$ 和 $\frac{K_{ss}}{Y_{ss}}$ 的取值。**

2.引入货币因素

在基准 DSGE 模型中引入可以决定价格水平或名义利率的货币因素，常用方法有两种：

- 引入货币并由中央银行决定货币供应量，常用方法有 MIU（Money in Utility，货币效用）和 CIA（Cash-in-Advance，现金优先）。
- 引入由中央银行控制的利率规则来决定名义利率，常用的利率规则是 Taylor（1993）提出的泰勒规则（Taylor Rule）。

2.1 MIU（Money in Utility）

MIU 方法假设持有货币会给家庭带来效用。因为家庭关心的其实是货币的真实购买力，所以进入效用函数的是真实货币余额，而非名义货币余额。

代表性家庭理性选择消费水平、劳动供给、货币持有和资本积累，以实现终生效用最大化：

$$\max E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, m_t, N_t)$$

其中 $m_t = M_t / P_t$ 为真实货币余额，M_t 为名义货币余额。

假设效用函数$U(C_t, m_t, N_t)$关于真实货币余额m_t是连续、二阶可微的，满足$U_{m,t} = \frac{\partial U(C_t, m_t, N_t)}{\partial m_t} > 0$，$U_{mm,t} = \frac{\partial^2 U(C_t, m_t, N_t)}{\partial m_t^2} \leq 0$，即货币的边际效用$U_{c,t}$大于零而且递减。

在模型中引入货币之后，家庭的预算约束也发生了变化。

- 家庭在第 t 期的支出除了消费支出、购买债券和资本积累之外，还包括货币持有 M_t；
- 家庭在第 t 期的收入除了工资、第 t-1 期购买的债券的本息以及资本的租金和折旧剩余之外，还包括第 t-1 期持有的、带入第 t 期的货币 M_{t-1}。

代表性家庭面临的预算约束为：

$$N_tW_tP_t + I_{t-1}B_{t-1} + K_{t-1}R_t^kP_t + (1-\delta)K_{t-1}P_t + M_{t-1} = C_tP_t + B_t + K_tP_t + M_t$$

等式两边都除以 P_t**，则代表性家庭面临的预算约束可以表示为：**

$$N_tW_t + \frac{I_{t-1}b_{t-1}}{\Pi_t} + K_{t-1}R_t^k + (1-\delta)K_{t-1} + \frac{m_{t-1}}{\Pi_t} = C_t + b_t + K_t + m_t$$

运用 Lagrange 方法可以求解代表性家庭的优化问题，Lagrange 函数为：

$$\mathrm{L}=E_0\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left\{U(C_t,m_t,N_t)+\lambda_t\left(N_tW_t+\frac{I_{t-1}b_{t-1}}{\Pi_t}+K_{t-1}R_t^k+(1-\delta)K_{t-1}+\frac{m_{t-1}}{\Pi_t}-C_t-b_t-K_t-m_t\right)\right\}$$

其中 λ_t 为 Lagrange 乘子。

与不存在货币的基准 DSGE 模型相比，关于消费水平 C_t，劳动供给 N_t、债券真实持有量 b_t 和资本积累 K_t 的一阶条件并没有变化，只是多了一个关于真实货币余额 m_t 的一阶条件：

$$\frac{\partial L}{\partial m_t} = U_{m,t} - \lambda_t + \beta E_t\left(\frac{\lambda_{t+1}}{\Pi_{t+1}}\right) = 0 \qquad \textbf{(23)}$$

由式(1) $\frac{\partial L}{\partial C_t} = U_{c,t} - \lambda_t = 0$ **和式(23)可得：**

$$U_{c,t} = U_{m,t} + \beta E_t\left(\frac{U_{c,t+1}}{\Pi_{t+1}}\right)$$

如果采用效用函数$U(C_t, m_t, N_t) = \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{m_t^{1-\upsilon}}{1-\upsilon} - \frac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}$，其中参数$\upsilon$控制真实货币余额带来的效用，则关于真实货币余额$m_t$的一阶条件为：

$$m_t^{-\upsilon} = \lambda_t - \beta E_t\left(\frac{\lambda_{t+1}}{\Pi_{t+1}}\right) \tag{24}$$

将式(24)在稳态附近对数线性化后得到：

$$-\upsilon \hat{m}_t - \hat{\lambda}_t = \frac{1}{I_{ss}-1}\hat{i}_t \tag{25}$$

问题：引入货币后，相对于上节中的基准 DSGE 模型，模型还有哪些变化？厂商的优化问题有变化吗？还需要什么新的条件？

引入货币之后，必须引入一个方程来决定货币供应量的动态。假设中央银行采用控制名义货币增长率G_t的方式执行货币政策，其中$G_t = M_t / M_{t-1}$，则

$$m_t = \frac{G_t}{\Pi_t} m_{t-1} \tag{26}$$

假设名义货币增长率G_t服从如下的 **AR(1)**过程：

$$\ln G_t - \ln G_{ss} = \rho_g (\ln G_{t-1} - \ln G_{ss}) + u_{g,t}$$

即

$$\hat{g}_t = \rho_g \hat{g}_{t-1} + u_{g,t} \tag{27}$$

这里$\hat{g}_t$表示货币政策冲击，$\rho_g \in (0,1)$且$u_{g,t}$服从独立同分布的正态分布$N(0, \sigma_g^2)$。

与基准的 DSGE 模型相比，以 MIU 形式引入货币之后的 DSGE 模型多了四个变量，即真实货币余额 m_t 、通货膨胀 Π_t 、名义利率 I_t 和名义货币供给增长率 G_t ，均衡性条件也多了四个方程，即关于 m_t 的一阶条件式(24)、描述货币动态的式(26)、描述货币政策冲击的式(27)以及描述名义利率、通货膨胀和真实利率之间关系的费雪方程式。

超级中性

假设稳态的货币增长率为G_{ss}，则通过模型均衡性条件的稳态分析可以得到$\Pi_{ss}=G_{ss}$，即稳态的通货膨胀率等于名义货币增长率。

稳态的名义利率为$I_{ss}=R_{ss}\Pi_{ss}=\frac{G_{ss}}{\beta}$。

2.2 泰勒规则

Taylor（1993）提出了如下的利率规则——泰勒规则（Taylor Rule）来描述美国的货币政策：

$$i_t = r^* + \pi_t + 0.5x_t + 0.5(\pi_t - \pi^{\text{Target}})$$

其中，i_t 表示美国联邦基金利率；π_t 表示前 4 个季度的通货膨胀率；x_t 表示真实 GDP 增长率与真实 GDP 趋势增长率之间偏离的百分点数；π^{Target} 为货币当局的目标通货膨胀水平，取值为 2%；r^* 为均衡实际利率，取值为 2%。

泰勒规则可以写成如下更清晰的形式：

$$i_t = r^* + \pi^{\text{Target}} + \phi_x x_t + \phi_\pi(\pi_t - \pi^{\text{Target}}) \tag{28}$$

其中 $\phi_x = 0.5$，$\phi_\pi = 1.5$。

泰勒准则（Taylor Principle）：要求 $\phi_{\pi} > 1$

自 Taylor（1993）之后，许多经济学家对泰勒规则进行了各种扩展并进行了估计，比如假设基准利率对预期的、当期的或者滞后的产出缺口和通货膨胀缺口作出反应：

$$\hat{i}_t = \phi_y E_t\{\hat{y}_{t+1}\} + \phi_\pi \left(E_t\{\pi_{t+1}\} - \pi^{\text{Target}}\right) \tag{29}$$

$$\hat{i}_t = \phi_y \hat{y}_t + \phi_\pi (\pi_t - \pi^{\text{Target}}) \tag{30}$$

$$\hat{i}_t = \phi_y \hat{y}_{t-1} + \phi_\pi (\pi_{t-1} - \pi^{\text{Target}}) \tag{31}$$

Clarida et al.（2000）提出了如下形式的前瞻型利率规则：

$$\hat{i}_t=\rho_I\hat{i}_{t-1}+(1-\rho_I)\Big(\phi_\pi\left(E_t\{\pi_{t,k}\}-\pi^{\text{Target}}\right)+\phi_y E_t\{\hat{y}_{t,q}\}\Big)+v_t \qquad (32)$$

其中 $\rho(L)=\rho_1+\rho_2 L+\cdots+\rho_n L^{n-1}$ 为滞后多项式，$\rho_I=\rho(1)=\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_n$，$\pi_{t,k}$ 为第 t 期到第 t+k 期期间的平均通货膨胀率，$\hat{y}_{t,q}$ 为第 t 期到第 t+q 期期间的平均产出缺口。

对应于现实中货币当局对基准利率的微调，这个泰勒规则引入了利率的局部调整机制，即 $\hat{i}_t=\rho(L)\hat{i}_{t-1}+(1-\rho_I)\hat{i}_t^*$，其中 $\hat{i}_t^*$ 为目标利率水平。

因为货币政策存在时滞效应，所以货币当局在调整基准利率时需要预测未来 k 期的通货膨胀和未来 q 期的产出缺口。因为货币政策对产出和价格的时滞效应不同，所以 k 和 q 是不同的。

应用中一般将式(32)简化为如下的带有利率平滑机制的前瞻型泰勒规则：

$$\hat{i}_t = \rho_I \hat{i}_{t-1} + (1-\rho_I)\left(\phi_\pi \left(E_t\{\pi_{t+1}\} - \pi^{\text{Target}}\right) + \phi_y E_t\{\hat{y}_{t+1}\}\right) + v_t \tag{33}$$

其中 v_t 表示货币政策冲击，服从如下的 AR(1)过程：

$$v_t = \rho_v v_{t-1} + u_{v,t} \tag{34}$$

其中 $\rho_v \in (0,1)$ 且 $u_{v,t}$ 服从独立同分布的正态分布 $N(0, \sigma_v^2)$ 。

对于货币供给增长率规则，也可以像泰勒规则那样，假设中央银行根据通货膨胀和产出缺口调整货币供给增长率 G_t：

$$\hat{g}_t = \phi_\pi^{'}\left(E_t\{\pi_{t+1}\} - \pi^{\text{Target}}\right) + \phi_y^{'} E_t\{\hat{y}_{t+1}\} + v_t$$

甚至还可以引入平滑机制：

$$\hat{g}_t = \rho_g \hat{g}_{t-1} + (1-\rho_g)\left(\phi_\pi^{'}\left(E_t\{\pi_{t+1}\} - \pi^{\text{Target}}\right) + \phi_y^{'} E_t\{\hat{y}_{t+1}\}\right) + v_t$$

但是，利率规则中的泰勒准则，即 $\phi_\pi > 1$，在货币供给增长率规则中不再适用。我们不知道如何对通货膨胀缺口和产出缺口做出反应才能保证名义利率和真实利率同方向变动。

当在基准 DSGE 模型中引入采用式(33)所示的泰勒规则描述货币政策时，模型的均衡性条件哪些方程组成？

3.引入价格粘性

- 在基准 DSGE 模型中引入货币因素之后，虽然可以进行货币政策分析，但是货币政策是中性的，这与货币政策短期非中性的实证结论不相符合。
- 必须引入其他因素，使货币政策具有非中性的特征。虽然有很多因素可以使货币政策具有非中性的特征，但是目前主流的新凯恩斯模型认为，价格粘性是决定货币政策非中性的最重要因素。

- 要引入价格粘性，首先需要解决的问题是谁来定价？价格粘性意味着厂商不能灵活的调整价格，但是同时也意味着在某种条件下厂商是可以调整价格的，即厂商具有定价权。
- 为了让厂商具有定价权，必须改变完全竞争的假设。本节将保留劳动力市场和资本市场完全竞争的假设，但是假设商品市场是垄断竞争的。

- 引入垄断竞争假设只是让厂商具备了定价权力。如果不在模型中引入其他因素，则在每一期厂商可以根据成本和需求的变化调整价格以实现利润最大化，价格依然是灵活调整的，货币政策依然是中性的。
- 必须引入某种摩擦使得厂商不能灵活调整价格。目前最常用的描述价格粘性的方法是 Calvo（1983）提出的随机价格调整模型。

3.1 理论模型

3.1.1 最终商品生产商

根据 Dixit & Stiglitz（1977），假设生产部门由连续统(0,1)上的垄断竞争厂商组成，生产同质但是可分的商品。记第 i 个垄断竞争厂商的产出为 Y_t^i， $i \in (0,1)$ 。

代表性家庭如何在这些同质但是可分的商品中做出选择呢？通常会假设存在一个最终商品生产商，最终商品生产商向连续统(0,1)上的垄断竞争厂商购买商品，将这些商品复合成最终商品（final goods）并出售给家庭。因为没有直接进入消费环节，所以可以将垄断竞争厂商生产的商品称为中间商品（intermediate goods）。

假设最终商品生产商采用如下的 CES（Constant elasticity of substitution，常数替代弹性）技术生产最终商品：

$$Y_t = \left(\int_0^1 (Y_t^i)^{(\varepsilon-1)/\varepsilon} di \right)^{\varepsilon/(\varepsilon-1)} \qquad \textbf{(35)}$$

其中ε为中间商品之间的替代弹性系数。

最终商品生产商面临的优化问题为：

$$\max_{\{Y_t^i\}} P_t\left(\int_0^1 \left(Y_t^i\right)^{(\varepsilon-1)/\varepsilon} di\right)^{\varepsilon/(\varepsilon-1)} - \int_0^1 P_t^i Y_t^i di$$

其最优解为：

$$Y_t^i = (P_t^i / P_t)^{-\varepsilon} Y_t \tag{36}$$

式(36)即为垄断竞争厂商面临的向下倾斜的需求曲线。

将式(36)带入式(35)，可得最终商品价格P_t为：

$$P_t = \left(\int_0^1 \left(P_t^i\right)^{1-\varepsilon} di\right)^{1/(1-\varepsilon)} \tag{37}$$

3.1.2 粘性价格假设下的垄断竞争厂商

假设每一个垄断竞争厂商都向代表性家庭雇佣劳动和租赁资本来生产商品，其生产函数为：

$$Y_t^i = A_t (K_{t-1}^i)^{\alpha} (N_t^i)^{1-\alpha} \tag{38}$$

其中 A_t **为技术冲击，服从如下的 AR(1)过程：**

$$\ln A_t = \rho_A \ln A_{t-1} + u_{A,t} \tag{39}$$

其中 $\rho_A \in (0,1)$ **且** $u_{A,t}$ **服从独立同分布的正态分布** $N(0, \sigma_A^2)$ **。**

根据生产函数的表达式并求解垄断竞争厂商的成本最小化问题，可以得到真实边际成本 MC_t^i 的表达式。求解成本最小化问题，可以得到：

$$R_t^k K_{t-1}^i = \tfrac{\alpha}{1-\alpha} W_t N_t^i \tag{40}$$

从而厂商的成本函数可以表示为：

$$S(Y_t^i) = R_t^k K_{t-1}^i + W_t N_t^i = \tfrac{1}{1-\alpha} W_t N_t^i$$

垄断竞争厂商的真实边际成本为：

$$MC_t^i = \frac{dS(Y_t^i)}{dY_t^i} = \frac{1}{A_t}\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}(R_t^k)^{\alpha}(W_t)^{1-\alpha} \tag{41}$$

采用 Calvo（1983）提出的随机价格调整模型引入价格粘性。假设在每一期厂商重新定价的概率为$1-\theta$，其中θ为价格粘性指数，θ越大则价格粘性越强。

因为所有厂商具有相同的生产技术，面临相同的需求曲线，所以在重新定价时会选择相同的最优价格P_t^*。

在第 t 期，$1-\theta$ 比例的能够重新定价的厂商选择最优价格 P_t^*，θ 比例的不能重新定价的厂商保持上一期的价格不变，从而加总的价格水平为：

$$P_t = \left(\theta\left(P_{t-1}\right)^{1-\varepsilon} + (1-\theta)\left(P_t^*\right)^{1-\varepsilon}\right)^{1/(1-\varepsilon)}$$

将上式在零通胀稳态对数线性化后可得：

$$\pi_t = (1-\theta)(p_t^* - p_{t-1}) \qquad \textbf{(42)}$$

中间商品生产厂商通过求解如下的优化问题来重新定价：

$$\max_{\{P_t^*\}} \sum_{k=0}^{\infty} (\theta)^k E_t \left\{ Q_{t+k} \left(P_t^* Y_{t+k}^i - MC_{t+k} P_{t+k} Y_{t+k}^i \right) \right\} \quad s.t. \quad Y_{t+k}^i = \left(P_t^* / P_{t+k} \right)^{-\varepsilon} Y_{t+k}$$

其中，$Q_{t+k} = \beta^k (C_{t+k} / C_t)^{-\sigma} (P_t / P_{t+k})$为名义支付的折现因子（假设厂商采用与代表性家庭相同的方式对名义支付进行折现）。

一阶条件为：

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\theta)^{k} E_{t}\left\{Q_{t+k} Y_{t+k}^{i}\left(P_{t}^{*}-\tfrac{\varepsilon}{\varepsilon-1} MC_{t+k} P_{t+k}\right)\right\}=0$$

将一阶条件在稳态附近对数线性化，可得：

$$p_{t}^{*}-p_{t-1}=(1-\beta\theta)\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^{k} E_{t}\left\{\widehat{mc}_{t+k}+(\hat{p}_{t+k}-\hat{p}_{t-1})\right\} \quad \mathbf{(43)}$$

从而

$$\beta\theta E_{t}\left\{p_{t+1}^{*}-p_{t}\right\}=(1-\beta\theta)\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^{k+1} E_{t}\left\{\widehat{mc}_{t+k+1}+(\hat{p}_{t+k+1}-\hat{p}_{t})\right\} \quad \mathbf{(44)}$$

式(43)和式(44)相减可得：

$$(p_{t}^{*}-p_{t-1})-\beta\theta E_{t}\left\{p_{t+1}^{*}-p_{t}\right\}=(1-\beta\theta)\widehat{mc}_{t}+\pi_{t} \quad \mathbf{(45)}$$

将式(42)代入式(45)，整理后可得如下的新凯恩斯菲利普斯曲线：

$$\pi_t = \beta E_t\left\{\pi_{t+1}\right\} + \lambda \widehat{mc}_t \tag{46}$$

其中 $\lambda \equiv (1-\beta\theta)(1-\theta)/\theta$ **。**

根据式(46)所示的新凯恩斯菲利普斯曲线，决定通货膨胀的因素有两个：一个是通货膨胀预期，一个是真实边际成本。因为 $\partial\lambda/\partial\theta < 0$ **，所以价格粘性越弱，则厂商的真实边际成本变动会更快的传导到商品价格上，从而对通货膨胀影响越大。**

Galí（2008）证明了，当家庭的效用函数为$U_t=\frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}-\frac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}$，厂商的生产函数为$Y_t=A_tN_t^{1-\alpha}$，且价格粘性是唯一的名义摩擦时，真实边际成本与产出缺口之间存在比例关系，即$\widehat{mc}_t=(\sigma+\frac{\varphi+\alpha}{1+\alpha})\tilde{y}_t$，从而新凯恩斯菲利普斯曲线可以表示为：

$$\pi_t=\beta E_t\left\{\pi_{t+1}\right\}+\kappa\tilde{y}_t \tag{47}$$

其中$\kappa\equiv\lambda(\sigma+\frac{\varphi+\alpha}{1+\alpha})$。这就是常见的以产出缺口表示的新凯恩斯菲利普斯曲线。

式(47)所示的新凯恩斯菲利普斯曲线只是式(46)所示的新凯恩斯菲利普斯曲线的一个特例，只有在非常特殊的条件下才可以采用。

当在第二节建立的引入货币因素的 DSGE 模型中进一步引入垄断竞争和价格粘性之后，我们就得到了一个基准的新凯恩斯模型（New Keynesian model）。新凯恩斯模型是目前货币理论和政策分析的主流分析框架。

3.2 通货膨胀惯性

式(46)所示的新凯恩斯菲利普斯曲线是完全前瞻型的（forward-looking），因为所有的厂商都根据对未来边际成本和需求曲线的预期调整价格。但是，国内外许多实证研究表明，通货膨胀动态中存在显著的惯性特征，即除了通货膨胀预期和真实边际成本之外，滞后的通货膨胀也对当期的通货膨胀具有显著的影响。

为了引入通货膨胀动态的后顾型特征（backward-looking），必须假设部分厂商在调整价格时会考虑过去的通货膨胀。目前常用的方法有两种：

- **Galí & Gertler（1999）**
- **Christiano et al.（2005）**

Galí & Gertler（1999）假设在每一期厂商可以重新定价的概率为$1-\theta$；不能重新定价的厂商保持上一期的价格不变；在能够重新定价的厂商中，$1-\omega$比例的厂商以前瞻型方式选择最优价格P_t^*，ω比例的厂商以后顾型方式对价格进行指数化，即会根据上一期的通货膨胀对产品价格进行指数化从而选择选择价格$P_{t-1}\Pi_{t-1}$。

在第 t 期，θ比例的不能重新定价的厂商的产品价格为P_{t-1}；在$1-\theta$比例的能够重新定价的厂商中，$1-\omega$比例的厂商选择最优价格P_t^*，ω比例的厂商选择价格$P_{t-1}\Pi_{t-1}$，从而加总的价格水平为：

$$P_t = \left(\theta(P_{t-1})^{1-\varepsilon} + (1-\theta)\left(\omega(\Pi_{t-1}P_{t-1})^{1-\varepsilon} + (1-\omega)(P_t^*)^{1-\varepsilon}\right)\right)^{1/(1-\varepsilon)}$$

在零通胀稳态附件对数线性化后可得：

$$\pi_t = (1-\theta)\omega\pi_{t-1} + (1-\theta)(1-\omega)(p_t^* - p_{t-1}) \qquad \textbf{(48)}$$

对于选择最优价格 P_t^* 的厂商而言，根据其最优定价问题的一阶条件及其对数线性化依然可以得到式(45)，结合式(48)可以得到如下的混合型新凯恩斯菲利普斯曲线：

$$\pi_t = \frac{\beta\theta}{\phi} E_t\{\pi_{t+1}\} + \frac{(1-\theta)\omega}{\phi} \pi_{t-1} + \frac{(1-\theta)(1-\beta\theta)(1-\omega)}{\phi} \widehat{mc}_t \tag{49}$$

其中 $\phi = \theta + \omega(1-\theta)(1+\beta\theta)$ **。**

Christiano et al.（2005）假设在每一期厂商可以重新进行最优定价的概率为$1-\theta$；不能重新定价的厂商会根据上一期的通货膨胀对产品价格进行指数化，即在第 t 期这些不能重新进行最优定价的厂商的产品价格为$P_{t-1}\Pi_{t-1}$。

在第 t 期, $1-\theta$ 比例的能够重新进行最优定价的厂商选择最优价格 P_t^*， θ 比例的不能重新进行最优定价的厂商的产品价格为 $P_{t-1}\Pi_{t-1}$，从而加总的价格水平为：

$$P_t = \left(\theta(\Pi_{t-1}P_{t-1})^{1-\varepsilon} + (1-\theta)(P_t^*)^{1-\varepsilon}\right)^{1/(1-\varepsilon)}$$

上式在零通胀稳态附近对数线性化后可得：

$$\pi_t = \theta\pi_{t-1} + (1-\theta)(p_t^* - p_{t-1}) \qquad \textbf{(50)}$$

厂商面临的最优定价问题为：

$$\max_{P_t^*} \sum_{k=0}^{\infty} (\theta)^k E_t \left\{ Q_{t+k} (P_t^* X_{t+k} Y_{t+k}^i - MC_{t+k} P_{t+k} Y_{t+k}^i) \right\}$$

$$s.t. \quad Y_{t+k}^i = (P_t^* X_{t+k} \big/ P_{t+k})^{-\varepsilon} Y_{t+k}$$

其中 $X_{t+k} = \begin{cases} \Pi_t \times \Pi_{t+1} \times \cdots \times \Pi_{t+k-1} & k \geq 1 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$ **表示价格的指数化系数。**

一阶条件为：

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\theta)^{k}E_{t}\left\{Q_{t+k}Y_{t+k}^{i}(P_{t}^{*}X_{t+k}-\tfrac{\varepsilon}{\varepsilon-1}MC_{t+k}P_{t+k})\right\}=0$$

将一阶条件在稳态附近对数线性化，可得：

$$p_{t}^{*}-p_{t-1}=(1-\beta\theta)\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^{k}E_{t}\left\{\widehat{mc}_{t+k}+\pi_{t+k}\right\}$$

结合式(50)可得混合型新凯恩斯菲利普斯曲线为：

$$\pi_{t}=\tfrac{\beta}{1+\beta}E_{t}\{\pi_{t+1}\}+\tfrac{1}{1+\beta}\pi_{t-1}+\lambda\widehat{mc}_{t} \qquad \textbf{(51)}$$

其中 $\lambda\equiv(1-\beta\theta)(1-\theta)/(1+\beta)\theta$ 。

4. Smets & Wouters(2003)

基准新凯恩斯模型还不能很好的拟合现实经济，因此为了能够运用 DSGE 模型研究现实问题，还需要对基准新凯恩斯模型进行拓展。本部分考虑如下方面的拓展：

- 资本调整成本和资本利用率
- 消费习惯
- 工资黏性

4.1 资本调整成本和资本利用率

家庭的预算约束为

$$N_t W_t + \frac{I_{t-1} b_{t-1}}{\Pi_t} + K_{t-1} R_t^k + (1-\delta) K_{t-1} = C_t + b_t + K_t$$

定义资本积累方程为：

$$K_t = (1-\delta) K_{t-1} + Inv_t \tag{52}$$

则家庭预算约束为：

$$N_t W_t + \frac{I_{t-1} b_{t-1}}{\Pi_t} + K_{t-1} R_t^k = C_t + b_t + Inv_t$$

商品市场出清条件为：

$$Y_t = C_t + Inv_t$$

引入资本调整成本后，资本积累方程为：

$$K_t = (1-\delta)K_{t-1} + F(Inv_t, Inv_{t-1}, K_{t-1})$$

如果资本调整成本是二次的，则

$$F = Inv_t - \tfrac{\psi}{2}\left(\tfrac{Inv_t}{K_{t-1}} - \delta\right)^2 K_{t-1} \qquad \textbf{(53)}$$

Christiano et al.（2005）认为二次资本调整成本无法描述实际经济的资本调整行为，建议采用如下形式的资本调整成本：

$$F=\left(1-S\left(\frac{Inv_t}{Inv_{t-1}}\right)\right)Inv_t \qquad \textbf{(54)}$$

其中，函数 $S(\cdot)$ **决定调整成本的大小，满足** $0<S(\cdot)<1$**、** $S(1)=S'(1)=0$ **和** $S''(1)>0$**。**

代表性家庭面临的资本积累方程为：

$$K_t=(1-\delta)K_{t-1}+\left(1-S\left(\frac{Inv_t}{Inv_{t-1}}\right)\right)Inv_t+\Delta_t \qquad \textbf{(55)}$$

资本形成后，并非所有资本都被有效利用，即有闲置资本，而且资本利用率具有明显的顺周期特征。考虑资本利用率后，家庭的预算约束方程为：

$$N_t W_t + \frac{I_{t-1} b_{t-1}}{\Pi_t} + K_{t-1}(R_t^k z_t - a(z_t)) = C_t + b_t + Inv_t + \Delta_t Q_t$$

其中，z_t 为资本利用率，$a(z_t)$ 为将资本利用率设定为 z_t 所带来的成本。

运用 Lagrange 方法可以求解代表性家庭的优化问题，Lagrange 函数为：

$$\mathrm{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi} \right) + \lambda_t \left(N_t W_t + \frac{I_{t-1} b_{t-1}}{\Pi_t} + K_{t-1}(R_t^k z_t - a(z_t)) - C_t - b_t - Inv_t - \Delta_t Q_t \right) \\ +V_t \left((1-\delta) K_{t-1} + \left(1 - S\left(\frac{Inv_t}{Inv_{t-1}} \right) \right) Inv_t + \Delta_t - K_t \right) \end{array} \right\}$$

其中 λ_t 为 Lagrange 乘子。

关于资本利用率z_t、购买的资本Δ_t、资本积累K_t和投资Inv_t的一阶条件分别为：

$$R_t^k = a'(z_t) \tag{56}$$

$$\lambda_t Q_t = V_t \tag{57}$$

$$V_t = \beta E_t\left\{\lambda_{t+1}\left(R_{t+1}^k z_{t+1} - a(z_{+1})\right)\right\} + \beta(1-\delta)E_t\left\{V_{t+1}\right\} \tag{58}$$

$$\lambda_t = V_t\left\{1 - S\left(\frac{Inv_t}{Inv_{t-1}}\right) - S'\left(\frac{Inv_t}{Inv_{t-1}}\right)\frac{Inv_t}{Inv_{t-1}}\right\} + \beta E_t\left\{V_{t+1}S'\left(\frac{Inv_{t+1}}{Inv_t}\right)\left(\frac{Inv_{t+1}}{Inv_t}\right)^2\right\} \tag{59}$$

4.1.1 式(56)的对数线性化：

$$R_{ss}^{k} = a'(1)$$

$$R_{ss}^{k}(1+\hat{r}_t^{k}) = a'(1) + a''(1)\hat{z}_t$$

化简后得到：

$$\hat{r}_t^{k} = \frac{a''(1)}{a'(1)}\hat{z}_t \qquad \textbf{(60)}$$

4.1.2 式(58)的对数线性化：

将$\lambda_t Q_t = V_t$代入，得：

$$1=\beta E_t\left\{\tfrac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}\left[\left(R_{t+1}^k z_{t+1}-a(z_{+1})\right)+Q_{t+1}(1-\delta)\right]\Big/Q_t\right\}$$

因为$1=\beta E_t\left\{\tfrac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}R_t\right\}$，所以

$$R_t Q_t=\left(R_{t+1}^k z_{t+1}-a(z_{+1})\right)+Q_{t+1}(1-\delta)$$

$$\Rightarrow R_{ss}(1+\hat{r}_t+\hat{q}_t)=R_{ss}^k(1+\hat{r}_{t+1}^k+\hat{z}_{t+1})-R_{ss}^k\hat{z}_{t+1}+(1-\delta)(1+\hat{q}_{t+1})$$

化简后得到：

$$\hat{r}_t+\hat{q}_t=\tfrac{R_{ss}^k}{R_{ss}}\hat{r}_{t+1}^k+\tfrac{(1-\delta)}{R_{ss}}\hat{q}_{t+1}\quad or\quad \hat{r}_t+\hat{q}_t=\beta R_{ss}^k\hat{r}_{t+1}^k+\beta(1-\delta)\hat{q}_{t+1} \qquad \textbf{(61)}$$

4.1.3 式(59)的对数线性化：

将 $\lambda_t Q_t = V_t$ **代入，得：**

$$\lambda_t = \lambda_t Q_t \left(1 - S\left(\frac{Inv_t}{Inv_{t-1}}\right) - S'\left(\frac{Inv_t}{Inv_{t-1}}\right)\frac{Inv_t}{Inv_{t-1}}\right) + \beta E_t \left\{\lambda_{t+1} Q_{t+1} S'\left(\frac{Inv_{t+1}}{Inv_t}\right)\left(\frac{Inv_{t+1}}{Inv_t}\right)^2\right\} \qquad \textbf{(62)}$$

记 $F_{1t} = 1 - S\left(\frac{Inv_t}{Inv_{t-1}}\right) - S'\left(\frac{Inv_t}{Inv_{t-1}}\right)\frac{Inv_t}{Inv_{t-1}}$**，** $F_{2,t+1} = S'\left(\frac{Inv_{t+1}}{Inv_t}\right)\left(\frac{Inv_{t+1}}{Inv_t}\right)^2$**，这两个函数的一阶泰勒展开为：**

$$F_{1t} = 1 - S''(1)(\widehat{Inv}_t - \widehat{Inv}_{t-1})$$

$$F_{2,t+1} = S''(1)(\widehat{Inv}_{t+1} - \widehat{Inv}_t)$$

式(62)化简为：

$$\lambda_t = \lambda_t Q_t F_{1t} + \beta E_t \left\{ \lambda_{t+1} Q_{t+1} F_{2,t+1} \right\}$$

$$\Rightarrow \lambda_{ss}(1+\hat{\lambda}_t) = \lambda_{ss}\left(1+\hat{\lambda}_t + \hat{q}_t - s(\widehat{Inv}_t - \widehat{Inv}_{t-1})\right) + \beta E_t \left\{ \lambda_{ss}(1+\hat{\lambda}_{t+1} + \hat{q}_{t+1}) s(\widehat{Inv}_{t+1} - \widehat{Inv}_t) \right\}$$

$$\Rightarrow 0 = \hat{q}_t - s(\widehat{Inv}_t - \widehat{Inv}_{t-1}) + \beta s(\widehat{Inv}_{t+1} - \widehat{Inv}_t)$$

式(59)的对数线性化结果为：

$$\widehat{Inv}_t = \tfrac{1}{s(1+\beta)}\hat{q}_t + \tfrac{1}{(1+\beta)}\widehat{Inv}_{t-1} + \tfrac{\beta}{(1+\beta)}\widehat{Inv}_{t+1} \qquad \textbf{(63)}$$

问题：引入资本调整成本和资本利用率还影响哪些均衡性条件？

厂商生产函数为$Y_t = A_t(z_t K_{t-1})^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$

成本最小化问题的一阶条件： $R_t^k z_t K_{t-1}^i = \frac{\alpha}{1-\alpha} W_t N_t^i$

4.2 消费习惯

假设家庭 t 期的消费效用不仅取决于 t 期的消费水平 C_t，还取决于 t-1 期的消费水平 C_{t-1}。家庭的效用函数表示为：

$$U(C_t, N_t) = \frac{(C_t - hC_{t-1})^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}$$

其中参数 h 决定消费习惯的强度。

关于消费的一阶条件为：

$$\lambda_t = (C_t - hC_{t-1})^{-\sigma} - \beta h(E_t\{C_{t+1}\} - hC_t)^{-\sigma} \qquad \textbf{(64)}$$

在稳态附件对数线性化为：

$$(1-\beta h)(1-h)\hat{\lambda}_t = -(1+\beta h^2)\sigma\hat{c}_t + h\sigma\hat{c}_{t-1} + \beta h\sigma E_t\{\hat{c}_{t+1}\} \qquad \textbf{(65)}$$

4.3 工资粘性

假设存在(0,1)连续统上的家庭，提供同质但是可分的劳动。假设第 i 个厂商总的劳动需求为N_t^i（$i \in (0,1)$），对第 j 个家庭劳动的需求为N_t^{ij}（$j \in (0,1)$），假设：

$$N_t^i = \left(\int_0^1 (N_t^{ij})^{(\eta-1)/\eta} dj \right)^{\eta/(\eta-1)}$$

工资指数为：

$$W_t = \left(\int_0^1 \left(W_t^j \right)^{1-\eta} dj \right)^{1/(1-\eta)} \qquad \textbf{(66)}$$

其中W_t^j为第 j 个家庭的名义工资水平。

厂商在工资支出水平Z_t和工资W_t^j给定的条件下，选择最优的N_t^{ij}使N_t^j最大化：

$$\max_{\{N_t^{ij}\}} N_t^i = \left(\int_0^1 (N_t^{ij})^{(\eta-1)/\eta} dj\right)^{\eta/(\eta-1)} \quad s.t. \ \int_0^1 W_t^j N_t^{ij} dj = Z_t$$

求解该优化问题可得：

$$N_t^{ij} = (W_t^j / W_t)^{-\eta} N_t^i \tag{67}$$

即垄断竞争的家庭面临一条向下倾斜的劳动需求曲线且劳动需求的工资弹性为η。

将$N_t^{ij} = (W_t^j / W_t)^{-\eta} N_t^i$带入$\int_0^1 W_t^j N_t^{ij} dj = Z_t$，可得：

$$\int_0^1 W_t^j N_t^{ij} dj = W_t N_t^i$$

采用 Calvo（1983）提出的随机价格调整模型引入工资粘性。假设在每一期家庭重新选择工资水平的概率为$1-\theta^{w}$，其中θ^{w}为工资粘性指数，θ^{w}越大则工资粘性越强。

因为所有家庭具有相同的效用函数，面临相同的劳动需求曲线，所以在重新选择工资水平时会选择相同的最优工资W_{t}^{*}。

在第 t 期，$1-\theta^{w}$比例的能够重新确定工资水平的家庭选择最优工资W_t^*，θ^{w}比例的不能重新确定工资水平的家庭保持上一期的工资不变，从而加总的工资水平为：

$$W_t = \left(\theta^{w}\left(W_{t-1}\right)^{1-\eta} + \left(1-\theta^{w}\right)\left(W_t^*\right)^{1-\eta}\right)^{1/(1-\eta)} \tag{68}$$

记真实工资水平为$w_t = W_t/P_t$，则式(68)可以表示为：

$$w_t = \left(\theta^{w}\left(w_{t-1}/\Pi_t\right)^{1-\eta} + \left(1-\theta^{w}\right)\left(w_t^*\right)^{1-\eta}\right)^{1/(1-\eta)} \tag{69}$$

将式(69)在稳态对数线性化后可得：

$$\hat{w}_t = \theta^{w}\hat{w}_{t-1} - \theta^{w}\hat{\pi}_t + (1-\theta^{w})\hat{w}_t^* \tag{70}$$

第 j 个家庭选择最优工资 W_t^* 的决策问题为：

$$\max_{\{W_t^*\}} E_t \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta^w)^k U(C_{t+k}^j, N_{t+k}^j)$$

$$s.t. \quad \begin{cases} C_{t+k}^j + \cdots \le W_t^* N_{t+k}^j / P_{t+k} + \cdots \\ N_{t+k}^j = (W_t^* / W_{t+k})^{-\eta} N_{t+k} \end{cases}$$

一阶条件为：

$$E_t \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta^w)^k N_{t+k}^j \left(U_c W_t^* / P_{t+k} + \tfrac{\eta}{\eta-1} U_n \right) \right\} = 0$$

带入效用函数后得到：

$$E_t \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta^w)^k N_{t+k}^j \left((C_{t+k}^j)^{-\sigma} W_t^* / P_{t+k} - \tfrac{\eta}{\eta-1} (N_{t+k}^j)^{\varphi} \right) \right\} = 0$$

在稳态附近对数线性化后得到：

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta^{w})^{k} E_{t}\left\{\hat{W}_{t}^{*}-\hat{p}_{t+k}-\sigma\hat{c}_{t+k}^{j}-\varphi\hat{n}_{t+k}^{j}\right\}=0$$

将 $\hat{c}_{t+k}^{j}=\hat{c}_{t+k}$ 和 $\hat{n}_{t+k}^{j}=-\eta\hat{W}_{t}^{*}+\eta\hat{w}_{t+k}+\hat{n}_{t+k}$ 带入，得到：

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta^{w})^{k} E_{t}\left\{(1+\eta\varphi)\hat{W}_{t}^{*}-\hat{p}_{t+k}-\sigma\hat{c}_{t+k}-\varphi\eta\hat{W}_{t+k}-\varphi\hat{n}_{t+k}\right\}=0$$

即

$$\hat{W}_{t}^{*}=\frac{1-\beta\theta^{w}}{1+\eta\varphi}\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta^{w})^{k} E_{t}\left\{\hat{p}_{t+k}+\sigma\hat{c}_{t+k}+\varphi\eta\hat{W}_{t+k}+\varphi\hat{n}_{t+k}\right\}=0 \tag{71}$$

从而

$$\beta\theta^{w}E_{t}\{\hat{W}_{t+1}^{*}\}=\tfrac{1-\beta\theta^{w}}{1+\eta\varphi}\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta^{w})^{k+1}E_{t}\left\{\hat{p}_{t+1+k}+\sigma\hat{c}_{t+1+k}+\varphi\eta\hat{W}_{t+1+k}+\varphi\hat{n}_{t+1+k}\right\}=0$$

(72)

式(71)减去式(72)，并将名义工资转化为真实工资后得到：

$$\hat{w}_{t}^{*}-\beta\theta^{w}E_{t}\{\hat{w}_{t+1}^{*}\}-\beta\theta^{w}E_{t}\{\hat{\pi}_{t+1}\}=(1-\beta\theta^{w})\hat{w}_{t}+\tfrac{1-\beta\theta^{w}}{1+\eta\varphi}(\sigma\hat{c}_{t}+\varphi\hat{n}_{t}-\hat{w}_{t})$$

(73)

带入式(70)，整理后得到描述工资动态的方程：

$$\hat{w}_{t}=\tfrac{1}{1+\beta}\hat{w}_{t-1}+\tfrac{\beta}{1+\beta}E_{t}\{\hat{w}_{t+1}\}-\tfrac{1}{1+\beta}\hat{\pi}_{t}+\tfrac{\beta}{1+\beta}E_{t}\{\hat{\pi}_{t+1}\}+\tfrac{(1-\theta^{w})(1-\beta\theta^{w})}{\theta^{w}(1+\beta)(1+\eta\varphi)}(\sigma\hat{c}_{t}+\varphi\hat{n}_{t}-\hat{w}_{t})$$

(74)

引入名义工资惯性：假设在每一期家庭重新选择工资水平的概率为$1-\theta^w$，不能重新选择工资水平进行指数化，即选择工资水平$W_{t-1}\Pi_{t-1}$，从而加总的工资水平为：

$$W_t=\left(\theta^w\left(W_{t-1}\Pi_{t-1}\right)^{1-\eta}+\left(1-\theta^w\right)\left(W_t^*\right)^{1-\eta}\right)^{1/(1-\eta)} \tag{75}$$

记真实工资水平为$w_t=W_t/P_t$，则式(75)可以表示为：

$$w_t=\left(\theta^w\left(w_{t-1}\Pi_{t-1}/\Pi_t\right)^{1-\eta}+\left(1-\theta^w\right)\left(w_t^*\right)^{1-\eta}\right)^{1/(1-\eta)} \tag{76}$$

将式(76)在稳态对数线性化后可得：

$$\hat{w}_t=\theta^w\hat{w}_{t-1}-\theta^w\hat{\pi}_t+(1-\theta^w)\hat{w}_t^*+\theta^w\hat{\pi}_{t-1} \tag{77}$$

第 j 个家庭选择最优工资 W_t^* 的决策问题为：

$$\max_{\{W_t^*\}} E_t \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta^w)^k U(C_{t+k}^j, N_{t+k}^j)$$

$$s.t. \quad \begin{cases} C_{t+k}^j + \cdots \le W_t^* X_{t+k} N_{t+k}^j / P_{t+k} + \cdots \\ N_{t+k}^j = (W_t^* X_{t+k} / W_{t+k})^{-\eta} N_{t+k} \end{cases}$$

一阶条件为：

$$E_t \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta^w)^k N_{t+k}^j \left(U_c X_{t+k} W_t^* / P_{t+k} + \tfrac{\eta}{\eta-1} U_n \right) \right\} = 0$$

最后可以得到如下的描述工资动态的方程：

$$\hat{w}_t = \tfrac{1}{1+\beta} \hat{w}_{t-1} + \tfrac{\beta}{1+\beta} E_t\{\hat{w}_{t+1}\} + \tfrac{1}{1+\beta} \hat{\pi}_{t-1} - \hat{\pi}_t + \tfrac{\beta}{1+\beta} E_t\{\hat{\pi}_{t+1}\} + \tfrac{(1-\theta^w)(1-\beta\theta^w)}{\theta^w (1+\beta)(1+\eta\varphi)} (\sigma \hat{c}_t + \varphi \hat{n}_t - \hat{w}_t)$$

(78)